Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(13) Der einfachste Algorithmus zur Berechnung von

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i,$$

wobei die x_i, $i = 1, \ldots, n$, Maschinenzahlen seien, ist gegeben durch

$$s_1 = x_1, \qquad s_{j+1} = s_j + x_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Mittels Fließkommaarithmetik erhält man damit statt s_k die Maschinenzahl $\tilde{s}_k$. Man zeige, daß (in erster Näherung) die Abschätzung

$$|\tilde{s}_k - s_k| \mathrel{\dot{\leq}} \mathrm{eps} \sum_{j=2}^{k} |s_j|$$

gilt. In welcher Reihenfolge sollte man deswegen summieren, wenn alle Summanden positiv sind? (3 Punkte)

(14) Man zeige mit differentieller Fehleranalyse, daß der Algorithmus zur Berechnung von $f(x)$ basierend auf der Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

für $x \neq 0$ mit hinreichend kleinem Betrag stabil ist. (6 Punkte)

(15) Man zeige:

(a) Für $|\varepsilon| \leq \mathrm{eps} < 1$ gilt

$$(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 + \bar{\varepsilon} \text{ mit } |\bar{\varepsilon}| \leq \frac{\mathrm{eps}}{1 - \mathrm{eps}}.$$

(b) Für $|\varepsilon_i| \leq \mathrm{eps}/(1 - \mathrm{eps})$, $i = 1, \ldots, k$, gilt

$$\prod_{i=1}^{k} (1 + \varepsilon_i) = 1 + \bar{\varepsilon} \text{ mit } |\bar{\varepsilon}| \leq \frac{k\,\mathrm{eps}}{1 - k\,\mathrm{eps}},$$

solange nur $k\,\mathrm{eps} < 1$ ist.

(3 Punkte)

(16) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ zeige man, daß

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{\frac{1}{k+1} n^{k+1}} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

(3 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 05.05.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung