

Ergänzende Übungen zur Vorlesung
Numerische lineare Algebra

Übung 8.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ nach Satz 3.7 faktorisiert gemäß

$$A = Q \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi^T.$$

Man zeige, daß

$$A^+ = \Pi \begin{bmatrix} (I - VM^{-1}V^T)R^{-1} & 0 \\ M^{-1}V^TR^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q^T,$$

wobei $V = R^{-1}S$ und $M = I + V^TV$.

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} AA^+ &= Q \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - VM^{-1}V^T)R^{-1} & 0 \\ M^{-1}V^TR^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q^T = \\ &= Q \begin{bmatrix} R(I - VM^{-1}V^T)R^{-1} + SM^{-1}V^TR^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T \end{aligned}$$

symmetrisch wegen

$$R(I - VM^{-1}V^T)R^{-1} + SM^{-1}V^TR^{-1} = I - SM^{-1}V^TR^{-1} + SM^{-1}V^TR^{-1} = I.$$

Es ist

$$\begin{aligned} A^+A &= \Pi \begin{bmatrix} (I - VM^{-1}V^T)R^{-1} & 0 \\ M^{-1}V^TR^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi^T = \\ &= \Pi \begin{bmatrix} I - VM^{-1}V^T & (I - VM^{-1}V^T)V \\ M^{-1}V^T & M^{-1}V^TV \end{bmatrix} \Pi^T \end{aligned}$$

symmetrisch wegen

$$\begin{aligned} M^{-1}V^TV &= V^TVM^{-1} &\iff V^TVM &= MV^TV \\ &&\iff V^TV(I + V^TV) &= (I + V^TV)V^TV \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} VM^{-1} &= (I - VM^{-1}V^T)V &\iff VM^{-1} &= V - VM^{-1}V^TV \\ &&\iff VM^{-1} &= V - VV^TVM^{-1} \\ &&\iff V &= VM - VV^TV \\ &&\iff V &= V(I + V^TV) - VV^TV. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$AA^+A = Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi^T = A$$

und

$$A^+AA^+ = \Pi \begin{bmatrix} (I - VM^{-1}V^T)R^{-1} & 0 \\ M^{-1}V^TR^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T = A^+.$$

□

Übung 8.2

Sei $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ und bezeichne $\varrho(T)$ den Spektralradius von T . Man zeige:

(a) Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0 \iff \varrho(T) < 1.$$

(b) Sei $c \in \mathbb{R}^n$. Zu $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ sei die Folge $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch die Rekursion $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$. Dann gilt

$$\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ konvergent für alle } x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ und } c \in \mathbb{R}^n \iff \varrho(T) < 1.$$

Beweis:

Man kann folgendermaßen schließen:

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Vektornorm, sodaß in der zugehörigen Matrixnorm

$$\|T\| \leq \varrho(T) + \varepsilon$$

gilt. Ist $\varrho(T) < 1$, so kann man ε so klein wählen, daß $L = \varrho(T) + \varepsilon < 1$ gilt. Für die entsprechend konstruierte Matrixnorm gilt dann $\|T\| \leq L < 1$ und damit

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k \leq L^k \rightarrow 0.$$

Ist $\varrho(T) \geq 1$, so existiert ein Eigenwert λ von T mit $|\lambda| \geq 1$. Ist $x \neq 0$ ein zugehöriger (normierter) Eigenvektor, so gilt

$$1 \leq |\lambda|^k = |\lambda|^k \|x\| = \|\lambda^k x\| = \|T^k x\| \leq \|T^k\| \|x\| = \|T^k\|$$

im Widerspruch zur Behauptung.

(b) Sei $\varrho(T) < 1$. Nach Teil (a) gibt es eine Vektornorm, sodaß $L = \|T\| < 1$ in der zugehörigen Matrixnorm gilt. Aus

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = T(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

folgt mit dieser Vektornorm, daß

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq L \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

und damit die Konvergenz der Folge.

Sei umgekehrt $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ konvergent für alle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die spezielle Wahl $x^{(0)} = 0$, daß

$$x^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} T^l c$$

für alle $c \in \mathbb{R}^n$ konvergent ist. Daraus folgt sofort die Existenz von

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} T^l \in \mathbb{R}^{n,n}$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$$

bzw. $\varrho(T) < 1$ nach Teil (a).

□

Übung 8.3

Man zeige, daß jede tridiagonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit nichtverschwindenden Diagonaleinträgen konsistent geordnet ist.

Beweis:

Ausgehend von

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & r_1 & & \\ l_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & r_{n-1} \\ & & l_n & d_n \end{bmatrix}$$

erhält man für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$zD^{-1}L + z^{-1}D^{-1}R = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1}d_2^{-1}r_1 & & \\ zd_2^{-1}l_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & z^{-1}d_{n-1}^{-1}r_{n-1} \\ & & zd_n^{-1}l_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit der nichtsingulären Matrix $S = \text{diag}(z, \dots, z^n)$ ergibt sich

$$S^{-1}(zD^{-1}L + z^{-1}D^{-1}R)S = \begin{bmatrix} 0 & d_2^{-1}r_1 & & \\ d_2^{-1}l_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & d_{n-1}^{-1}r_{n-1} \\ & & d_n^{-1}l_n & 0 \end{bmatrix},$$

d. h. die Matrix $zD^{-1}L + z^{-1}D^{-1}R$ ist ähnlich zu der nicht von z abhängigen Matrix $D^{-1}L + D^{-1}R = D^{-1}(L + R)$.

□

Übung 8.4

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit. Ist zu A eine Zerlegung der Form $A = M - N$ gegeben, sodaß $M + M^T - A$ symmetrisch und positiv definit ist, so ist M nichtsingulär und es gilt

$$\varrho(M^{-1}N) < 1.$$

Beweis:

Sei M singulär. Dann existiert ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Mv = 0$ und es folgt der Widerspruch

$$v^T(M + M^T - A)v = -v^T Av < 0.$$

Also ist M nichtsingulär. Damit ergibt sich

$$\varrho(M^{-1}N) = \varrho(A^{1/2}M^{-1}NA^{-1/2}) = \varrho(A^{1/2}M^{-1}(M - A)A^{-1/2}) = \varrho(I - \tilde{M}^{-1})$$

mit

$$\tilde{M} = A^{-1/2}MA^{-1/2}.$$

Da $M + M^T - A$ symmetrisch und positiv definit ist, ist

$$A^{-1/2}(M + M^T - A)A^{-1/2} = \tilde{M} + \tilde{M}^T - I$$

symmetrisch und positiv definit.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $T = M^{-1}N$. Sei $\lambda = 1$. Dann existiert ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $M^{-1}Nv = v$ bzw. $Mv = Nv$ und es folgt der Widerspruch $Av = Mv - Nv = 0$. Also ist $\lambda \neq 1$. Damit ist λ Eigenwert von $I - \tilde{M}^{-1}$ bzw. $1 - \lambda$ Eigenwert von $\tilde{M}^{-1}$ bzw. $(1 - \lambda)^{-1}$ Eigenwert von $\tilde{M}$. Also existiert ein $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x^H x = 1$ und

$$\tilde{M}x = \frac{1}{1 - \lambda}x, \quad x^H \tilde{M}^T = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}}x^H.$$

Daraus folgt

$$x^H(\tilde{M} + \tilde{M}^T - I)x = \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} - 1 > 0.$$

Schreibt man $\lambda = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{1 - u - iv} + \frac{1}{1 - u + iv} - 1 = \frac{1 - u + iv + 1 - u - iv}{(1 - u)^2 + v^2} - 1 = \\ &= \frac{2 - 2u - 1 + 2u - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \end{aligned}$$

und damit $|\lambda|^2 = u^2 + v^2 < 1$.

□

Übung 8.5

Unter den Voraussetzungen von Übung 8.4 zeige man

$$\varrho(T) \leq \|A^{1/2}TA^{-1/2}\|_2 < 1, \quad T = M^{-1}N.$$

Beweis:

Mit der Bezeichnung aus Übung 8.4 gilt

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}M^{-1}NA^{-1/2}\|_2^2 &= \|A^{1/2}M^{-1}(M-A)A^{-1/2}\|_2^2 = \\ &= \|A^{1/2}M^{-1}A^{1/2}A^{-1/2}(M-A)A^{-1/2}\|_2^2 = \\ &= \|\tilde{M}^{-1}(\tilde{M}-I)\|_2^2 = \|I - \tilde{M}^{-1}\|_2^2 = \\ &= \varrho((I - \tilde{M}^{-1})^T(I - \tilde{M}^{-1})) = \\ &= \varrho(I - \tilde{M}^{-1} - \tilde{M}^{-T} + \tilde{M}^{-T}\tilde{M}^{-1}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist

$$C = M + M^T - A$$

symmetrisch und positiv definit. Das gleiche gilt dann für

$$\tilde{C} = A^{-1/2}CA^{-1/2} = \tilde{M} + \tilde{M}^T - I$$

und für

$$\tilde{K} = \tilde{M}^{-T}\tilde{C}\tilde{M}^{-1} = \tilde{M}^{-1} + \tilde{M}^{-T} - \tilde{M}^{-T}\tilde{M}^{-1}.$$

Damit hat man

$$\|A^{1/2}M^{-1}NA^{-1/2}\|_2^2 = \varrho((I - \tilde{M}^{-1})^T(I - \tilde{M}^{-1})) = \varrho(I - \tilde{K}).$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $(I - \tilde{M}^{-1})^T(I - \tilde{M}^{-1})$. Dann gilt $\lambda \geq 0$. Außerdem ist $1 - \lambda$ Eigenwert von $\tilde{K}$ und es gilt $1 - \lambda > 0$ bzw. $\lambda < 1$. □

Übung 8.6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nichtsingulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Zur iterativen Lösung von $Ax = b$ sei mit

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega r^{(k)}, \quad r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$$

bzw. $T(\omega) = I - \omega A$ die sogenannte Richardson-Iteration gegeben. Man zeige:

(a) Besitzt A nur (reelle) positive Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_n$, so gilt

$$\varrho(T(\omega)) < 1 \iff 0 < \omega < 2/\mu_{\max}$$

sowie

$$\min_{0 < \omega < 2/\mu_{\max}} \{\varrho(T(\omega))\} = \varrho(T(2/(\mu_{\max} + \mu_{\min}))) = \frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{\mu_{\max} + \mu_{\min}},$$

wobei

$$\mu_{\max} = \max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}, \quad \mu_{\min} = \min\{\mu_1, \dots, \mu_n\}.$$

(b) Besitzt A die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_n$ und gibt es ein $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$|\mu_i - \sigma| < |\sigma|, \quad i = 1, \dots, n,$$

so gilt

$$\varrho(T(1/\sigma)) < 1.$$

Beweis:

Man kann folgendermaßen vorgehen:

(a) Ist λ ein Eigenwert von $T(\omega)$, so gilt $\lambda = 1 - \omega\mu$ mit einem (positiven) Eigenwert μ von A . Gilt $0 < \omega < 2/\mu_{\max}$, so folgt

$$1 - \omega\mu_{\max} \leq \lambda \leq 1 - \omega\mu_{\min}$$

bzw.

$$-1 < \lambda < 1.$$

Gilt umgekehrt $\varrho(T(\omega)) < 1$ und ist μ ein (positiver) Eigenwert von A , so ist $\lambda = 1 - \omega\mu$ ein Eigenwert von $T(\omega)$, d. h. es ist $|\lambda| < 1$. Aus

$$-1 < 1 - \omega\mu < 1$$

folgt $\omega > 0$ sowie

$$0 < \mu < 2/\omega,$$

insbesondere also $\mu_{\max} < 2/\omega$ bzw. $\omega < 2/\mu_{\max}$.

Für die Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$, von $T(\omega)$ gilt

$$\lambda_i = 1 - \omega\mu_i$$

In

$$1 - \omega\mu_{\max} \leq 1 - \omega\mu_i \leq 1 - \omega\mu_{\min}$$

nehmen obere und untere Schranke mit wachsendem ω ab. Damit ist der optimale Wert ω_{opt} für ω gegeben durch

$$1 - \omega_{\text{opt}}\mu_{\min} = \omega_{\text{opt}}\mu_{\max} - 1,$$

d. h.

$$\omega_{\text{opt}} = 2/(\mu_{\max} + \mu_{\min})$$

und es gilt

$$\varrho(\omega_{\text{opt}}) = 1 - \omega_{\text{opt}}\mu_{\min} = \frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{\mu_{\max} + \mu_{\min}}.$$

(b) Ist λ ein Eigenwert von $T(1/\sigma)$, so gilt $\lambda = 1 - \mu/\sigma$ mit einem Eigenwert μ von A . Damit folgt

$$|\lambda| = |1 - \mu/\sigma| = |\mu - \sigma|/|\sigma| < |\sigma|/|\sigma| = 1.$$

□