Prof. Dr. P. Kunkel
Dr. B. Schulze
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2003/04

Prüfungsklausur

zur Vorlesung Numerische Mathematik

Name:______________________________

Matrikel-Nr.:______________________________

Mir ist bekannt, daß Täuschungsversuche zum Nichtbestehen der Klausur führen.

Unterschrift:______________________________

Bei dieser Klausur sind insgesamt 32 Punkte möglich.
Zum Bestehen der Klausur sind 16 Punkte nötig.

1	2	3	4	Ges.	Note	Unterschriften
						/

Die Note dieser Prüfungsklausur zählt zu 25% zur Gesamtnote im Prüfungsfach Mathematik der Informatik-Vordiplomprüfung.
Erlaubte Hilfsmittel sind beliebig viele Bücher, Skripte und eigene Aufzeichnungen sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner. Papier für die Bearbeitung der Klausuraufgaben ist selbst zu stellen.

(1) Zur Berechnung von $y = \sinh x$ kann man die Darstellung

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

verwenden. Man führe eine differentielle Fehleranalyse für den darauf aufbauenden Algorithmus durch und begründe, warum dieser Algorithmus für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x|$ hinreichend klein instabil ist. Außerdem gebe man einen stabilen Algorithmus zur Berechnung von y auf der Basis der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion an. (11 Punkte)

(2) Die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 2 \\ -10 & -47 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

besitzt eine Zerlegung der Form

$$A = L \cdot D \cdot L^T,$$

wobei L eine normierte untere Dreiecksmatrix und D eine nichtsinguläre Diagonalmatrix ist. Man bestimme (rundungsfehlerfrei) die Matrizen L und D. (6 Punkte)

(3) Man bestimme (rundungsfehlerfrei) das zu den Werten

i	0	1	2	3	4
t_i	-3	-1	0	1	3
f_i	61	1	1	5	121

gehörige Interpolationspolynom bzgl. der Newton-Basis und werte es an den Stellen $t = -2$ bzw. $t = 2$ mit Hilfe des modifizierten Horner-Schemas (ebenfalls rundungsfehlerfrei) aus. (7 Punkte)

(4) Man zeige, daß das Newton-Verfahren für das Nullstellenproblem

$$x^2 - 2 = 0$$

auf die Form

$$x_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{2}{x_\nu}\right)$$

gebracht werden kann, und führe auf der Basis dieser Darstellung drei Iterationsschritte ausgehend von $x_0 = 2$ unter Verwendung der Arithmetik in $\mathbb{M}_{10,6}$ durch. (8 Punkte)