Prof. Dr. P. Kunkel
Dr. B. Schulze
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2005/06

Musterlösungen zur Testklausur

Numerische Mathematik

(1) Der Algorithmus zur Berechnung von $y = \sinh x$ aufbauend auf der Darstellung

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

kann geschrieben werden in der Form

$$\begin{aligned}
&x_1 = x, && \varphi_1(x_1) = \left(\begin{smallmatrix} e^{x_1} \\ e^{-x_1} \end{smallmatrix}\right), && \psi_1(x_1) = \tfrac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}, \\
&x_2 = \left(\begin{smallmatrix} e^{x} \\ e^{-x} \end{smallmatrix}\right), && \varphi_2(x_2) = x_{21} - x_{22}, && \psi_2(x_2) = \tfrac{x_{21} - x_{22}}{2}, \\
&x_3 = e^x - e^{-x}, && \varphi_3(x_3) = \tfrac{x_3}{2}, && \psi_3(x_3) = \tfrac{x_3}{2}, \\
&x_4 = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2}.
\end{aligned}$$

Man erhält als differentielle Konditionen der Restabbildungen

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \left| \frac{x_1}{y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x_1) \right| = \left| \frac{x_1}{y} \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} \right| = \left| \frac{x}{\sinh x} \cosh x \right| = |x \coth x|, \\
\kappa_{21} &= \left| \frac{x_{21}}{y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{21}}(x_2) \right| = \left| \frac{x_{21}}{y} \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{e^x}{\sinh x} \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} \right|, \\
\kappa_{22} &= \left| \frac{x_{22}}{y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{22}}(x_2) \right| = \left| \frac{x_{22}}{y} \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{e^{-x}}{\sinh x} \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right|, \\
\kappa_3 &= \left| \frac{x_3}{y} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}(x_3) \right| = \left| \frac{x_3}{y} \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{e^x - e^{-x}}{\sinh x} \frac{1}{2} \right| = 1.
\end{aligned}$$

Für $x \to 0$ gilt für die differentielle Kondition des Problems $\kappa_1 \to 1$, während $\kappa_{21}, \kappa_{22} \to \infty$. Der vorliegende Algorithmus ist demnach für $x \to 0$ instabil. Der Grund dafür ist die auftretende Auslöschung bei der Subtraktion. Einen stabilen Algorithmus erhält man auf der Basis der Reihendarstellung

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k \geq 0} \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

da hier nur Zahlen mit gleichem Vorzeichen addiert werden müssen.

(2) Aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} d_1 & l_{21}d_1 & l_{31}d_1 \\ l_{21}d_1 & l_{21}^2 d_1 + d_2 & l_{21}l_{31}d_1 + l_{32}d_2 \\ l_{31}d_1 & l_{21}l_{31}d_1 + l_{32}d_2 & l_{31}^2 d_1 + l_{32}d_2^2 + d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} d_1 &= a_{11} = -2, \\ l_{21} &= a_{21}/d_1 = (-10)/(-2) = 5, \\ l_{31} &= a_{31}/d_1 = 2/(-2) = -1, \\ d_2 &= a_{22} - l_{21}^2 d_1 = (-47) - 25 \cdot (-2) = 3, \\ l_{32} &= (a_{32} - l_{21}l_{31}d_1)/d_2 = (7 - 5 \cdot (-1) \cdot (-2))/3 = -1, \\ d_3 &= a_{33} - l_{31}^2 d_1 - l_{32}^2 d_2 = 2 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 1. \end{aligned}$$

Durch Probe kann man überprüfen, daß tatsächlich $A = L \cdot D \cdot L^T$ gilt.

(3) Berechnet man für

i	0	1	2	3	4
t_i	-3	-1	0	1	3
f_i	61	1	1	5	121

die dividierten Differenzen $D_{k,l}$ entsprechend

$$D_{k,l} = \frac{D_{k,l-1} - D_{k+1,l-1}}{t_k - t_{k+l}}, \quad D_{k,0} = f_k,$$

so erhält man das Dreiecksschema

k	t_k	$D_{k,0}$	$D_{k,1}$	$D_{k,2}$	$D_{k,3}$	$D_{k,4}$
0	-3	61	-30	10	-2	1
1	-1	1	0	2	4	
2	0	1	4	18		
3	1	5	58			
4	3	121				

.

Auswerten mit Hilfe des modifizierten Horner-Schemas liefert unter Verwendung von $V_l = D_{0,l}$ für $t = -2$

$$\begin{aligned}
s &= V_4 = 1, \\
s &= s(t - t_3) + V_3 = 1(-2 - 1) + (-2) = -5, \\
s &= s(t - t_2) + V_2 = (-5)(-2 - 0) + 10 = 20, \\
s &= s(t - t_1) + V_1 = 20(-2 - (-1)) + (-30) = -50, \\
s &= s(t - t_0) + V_0 = (-50)(-2 - (-3)) + 61 = 11
\end{aligned}$$

bzw. für $t = -2$

$$\begin{aligned}
s &= V_4 = 1, \\
s &= s(t - t_3) + V_3 = 1(2 - 1) + (-2) = -1, \\
s &= s(t - t_2) + V_2 = (-1)(2 - 0) + 10 = 8, \\
s &= s(t - t_1) + V_1 = 8(2 - (-1)) + (-30) = -6, \\
s &= s(t - t_0) + V_0 = (-6)(2 - (-3)) + 61 = 31.
\end{aligned}$$

(4) Mit $f(x) = x^2 - 2$ erhält man für das Newton-Verfahren

$$\begin{aligned}
x_{\nu+1} &= x_\nu - f'(x_\nu)^{-1} f(x_\nu) = x_\nu - \frac{1}{2x_\nu}(x_\nu^2 - 2) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(2x_\nu - x_\nu + \frac{2}{x_\nu}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x_\nu + \frac{2}{x_\nu}\Big)
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung, daß für die Berechnung von $x_{\nu+1}$ die Zahlen 0.5, 2.0 und x_ν in $\mathbb{M}_{10,6}$ liegen, ergibt sich in der Arithmetik von $\mathbb{M}_{10,6}$

$$x_{\nu+1} = 0.5 \odot (x_\nu \oplus 2.0 \oslash x_\nu)$$

für die tatsächlich berechneten Werte. Die ersten Iterierten berechnen sich damit zu

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.5 \odot (x_0 \oplus \mathrm{fl}(2.0/2.0)) = 0.5 \odot (x_0 \oplus \mathrm{fl}(1.0)) = \\
&= 0.5 \odot \mathrm{fl}(2.0 + 1.0) = \mathrm{fl}(0.5 \cdot 3.0) = 1.5
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0.5 \odot (x_1 \oplus \mathrm{fl}(2.0/1.5)) = 0.5 \odot (x_1 \oplus \mathrm{fl}(1.333333)) = \\
&= 0.5 \odot \mathrm{fl}(1.50000 + 1.33333) = \mathrm{fl}(0.5 \cdot 2.83333) = \mathrm{fl}(1.416665) = 1.41667
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_3 &= 0.5 \odot (x_2 \oplus \mathrm{fl}(2.0/1.41667)) = 0.5 \odot (x_2 \oplus \mathrm{fl}(1.411761)) = \\
&= 0.5 \odot \mathrm{fl}(1.41667 + 1.41176) = \mathrm{fl}(0.5 \cdot 2.82843) = \mathrm{fl}(1.414215) = 1.41422\,.
\end{aligned}$$