Nachklausur

1) Bestimmen Sie zu jeder der nachfolgenden GDGs eine Lösung des Anfangswertproblems zusammen mit ihrem maximalen Existenzintervall. Entscheiden Sie dann jeweils über die Eindeutigkeit der (maximalen) Lösung des **AWP**. Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig!
   a) $y'(x) = 2x(1 + y^2(x))$ mit $y(0) = 1$,
   b) $y'(x) = \sqrt[3]{y(x) + 1}$ und $y(0) = 0$.

   $3 + 6$ Punkte

2) Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung
$$y'(x) = y^3(x) - y(x) - \frac{1}{2021} \sin(\pi y(x)) \text{ wobei } x \in \mathbb{R}.$$
   a) Erklären Sie, warum für jeden Anfangswert $y(\xi) = \eta$, wobei $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf einem maximalen Existenzintervall $(a_\eta, b_\eta) \subset \mathbb{R}$ existiert.
   b) Finden Sie alle stationären Lösungen $y_s \in \mathbb{R}$ der Differentialgleichung, das heißt $y(x) = y_s$ für alle reellen x ist eine Lösung.
   c) Sei nun $\xi = 0$, dass heißt $y(0) = \eta$ der Anfangswert. Beweisen Sie, für $\eta \in (-1, 1)$, die Existenz der beiden Grenzwerte $L_+(\eta) = \lim_{x\to\infty} y(x)$ sowie $L_-(\eta) = \lim_{x\to-\infty} y(x)$ und bestimmen Sie diese in Abhängigkeit von η.
   d) Sei weiterhin $\xi = 0$, dass heißt $y(0) = \eta$ der Anfangswert. Beweisen Sie, für beliebiges $\eta > 1$, die Existenz der, eventuell uneigentlichen, Grenzwerte $L_+(\eta) = \lim_{x\to b_\eta} y(x)$ und $L_-(\eta) = \lim_{x\to a_\eta} y(x)$ und bestimmen Sie diese. Sind a_η beziehungsweise b_η endlich? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig!

   $2 + 2 + 3 + 4$ Punkte

3) Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung
$$y'''(x) - y''(x) = 0, x \in \mathbb{R}, \text{ und } y''(0) = \eta_2, y'(0) = \eta_1, y(0) = \eta_0.$$
   Klassifizieren Sie das vorliegende GDG-Problem.
   a) Finden Sie ein zugehöriges Fundamentalsystem.
   b) Charakterisieren Sie, für welche $(\eta_0, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^3$ die zugehörige Lösung nicht konstant ist, aber beschränkt bleibt, wenn x nach $+\infty$ strebt.

   $4 + 3$ Punkte

BITTE WENDEN

4) Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \text{ und } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

das heisst $y(0) = \eta \in \mathbb{R}^2$. Klassifizieren Sie dieses Differentialgleichungssystem.

a) Finden Sie ein η_+^n, so dass die Lösung $y(x)$ dieses Anfangswertproblems für $x \to +\infty$ gegen $0_{\mathbb{R}^2}$ geht.

b) Finden Sie ein η_-^n, so dass die Lösung $y(x)$ dieses Anfangswertproblems für $x \to -\infty$ gegen $0_{\mathbb{R}^2}$ geht.

c) Finden Sie ein η^∞, so dass die Lösung $y(x)$ dieses Anfangswertproblems nunmehr $|y(x)| \to \infty$ wenn $|x| \to \infty$ erfüllt. Begründen Sie Ihre Aussage.

$2 + 3 + 3$ Punkte

ENDE DER AUFGABEN