

1.5 Matrizen

Definition 1.18 Für $n, k \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R}^{n \times k} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^k$$

die **Menge der $(n \times k)$ -Matrizen**.

Ein Element $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ heißt **$(n \times k)$ -Matrix**.

Bemerkung

- Eine $(n \times k)$ -Matrix hat n **Zeilen** und k **Spalten** bzw.
- k **Spaltenvektoren** $M_1, \dots, M_l \in \mathbb{R}^n$ bzw.
- n **Zeilenvektoren** $M^1, \dots, M^n \in \mathbb{R}^k$.

Schreibweise $M = (M_i^j)_{i=1, \dots, l}^{j=1, \dots, k}$ für die **Einträge** $M_i^j \in \mathbb{R}$ in der j -ten Zeile und i -ten Spalte.

Bemerkung

- *Ein homogenes $(n \times k)$ -Gleichungssystem wird durch die entsprechende $(n \times k)$ -Matrix von Spaltenvektoren eindeutig beschrieben.*
- *Es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die beschreibende Matrix für ein homogenes lineares Gleichungssystem der Größe $(n \times k)$. Dann ist*

$$t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \text{ eine Lösung}$$

genau dann, wenn

$t = (t_1, \dots, t_k)$ ist senkrecht zu allen Zeilenvektoren von M .

Definition 1.19 Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Der **Zeilenraum**

$$Z_M := \text{span}(\{M^1, \dots, M^n\}) \subset \mathbb{R}^k.$$

ist der von den Zeilenvektoren $M^1, \dots, M^n$ aufgespannte Unterraum in $\mathbb{R}^k$.

Der Spaltenraum

$$S_M := \text{span}(\{M_1, \dots, M_k\}) \subset \mathbb{R}^n.$$

ist der von den Spaltenvektoren $M_1, \dots, M_k$ aufgespannte Unterraum in $\mathbb{R}^n$.

Satz 1.6 *Für jede Matrix M gilt*

$$\dim(Z_M) = \dim(S_M).$$

Bemerkung *Ein wichtiger und schwerer Satz, wir werden im Verlauf der VL 2 Beweise/Erklärungen kennenlernen, die 2 Sichtweisen auf Matrizen widerspiegeln.*

Definition 1.20 *Für $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$*

$$\text{Rang}(M) := \dim(Z_M).$$

Lemma 1.4 Für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sei

$$M := (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Dann gilt für $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = 0$$

genau dann, wenn

$$t \in Z_M^\perp.$$

Definition 1.21 Für $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$

$$\text{Kern}(M) := Z_M^\perp \subset \mathbb{R}^k.$$

Bemerkung Die Menge $\text{Kern}(M)$ ist die Menge aller Lösungen des durch $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ beschriebenen homogenen linearen Gleichungssystems der Größe $(n \times k)$.

Korollar 1.2 *Die Menge der Lösungen eines homogenen durch $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ beschriebenen Gleichungssystems bildet einen Unterraum von $\mathbb{R}^k$ der Dimension*

$$\dim(\text{Kern}(A)) = k - \text{Rang}(A).$$

Definition 1.22 Eine $(n \times k)$ -Matrix ist in **Zeilenstufenform**, falls

- 1 Die Anzahl der zusammenhängend führenden Nullen von Zeile zu Zeile anwächst und
- 2 der erste Eintrag ungleich Null in jeder Zeile, das **Pivotelement**, zu einem Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ in der entsprechenden Spalte gehört.

Bsp. 1.12

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & * & * \\ \hline 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 0 & * \\ 0 & * \\ \hline 1 & * \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 0 & * \\ 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & * \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Satz 1.7 Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ in Zeilenstufenform gilt

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A) &= \text{Anzahl der Stufen in } A \\ &= \text{Anzahl der Pivotstellen in } A = \dim(Z_A). \end{aligned}$$

Bsp. 1.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang}(A) = 2.$$

$$\dim(\text{Kern}(A)) = 3.$$

$$Z_A = \{e_3, e_4\}^\perp \Rightarrow \dim(Z_A) = 2$$

Definition 1.23 Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ heißen die folgenden **Zeilenoperationen zulässig**:

- Multiplikation sämtlicher Zeileneinträge mit einer Zahl $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Komponentenweise(=vektormässige) Addition einer Zeile auf eine andere

und damit auch

- die Vertauschung bzw.
- die Komponentenweise Subtraktion von Zeilen.

Bemerkung Zulässige Zeilenoperationen sind **umkehrbar**! D.h. nach jeder zZo lässt sich die Originalmatrix durch weitere zZo's wieder herstellen.

Satz 1.8 *Die Menge der Lösungen eines durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ beschriebenen linearen Gleichungssystems bleiben bei zulässigen Zeilenoperationen unverändert.*

Insbesondere verändern sich Rang und Kerndimension von Matrizen nicht bei zulässigen Zeilenoperationen.

Ausserdem verändern zulässige Zeilenoperationen den Spaltenrang nicht, genauer: wenn gewisse Spalten so ausgewählt werden, dass sie eine Basis des Spaltenraumes sind, dann sind sie dies nach den zulässigen Zeilenoperationen noch immer.

Bemerkung *Gleichwohl verändern zZo im Allgemeinen den Spaltenraum — aber nicht seine Dimension.*

Satz 1.9 *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ lässt sich durch zulässige Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen (Gauß-Algorithmus).*

Bsp. 1.14

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Rang}(A) = 3, \dim(\text{Kern}(A)) = 2$$

Definition 1.24 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ist in **diagonalisierter Zeilenstufenform**, falls

- 1 jeder Diagonaleintrag ungleich Null zu einem euklidischen Standard-Basisvektor in der entsprechenden Spalte gehört und
- 2 nach Streichung aller Null-Zeilen in A eine Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform entsteht.

Bsp. 1.15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 1.10 Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ in diagonalisierter Zeilenstufenform mit $\text{Rang}(A) = r \leq k$.

Sei $h_1, \dots, h_{k-r}$ die Menge der Vektoren, die aus den Nicht-Einheits-Spaltenvektoren von A bei Ersetzen des jeweiligen Diagonaleintrags 0 durch -1 entstehen, dann gilt

$$\text{Kern}(A) = \text{span}(\{h_1, \dots, h_{k-r}\}).$$

Bsp. 1.16

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Rang}(A) = 2, \dim(\text{Kern}(A)) = 2.$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Kern}(A) = \text{Span}(\{h_1, h_2\}).$$

Bemerkung Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ in Zeilenstufenform kann durch Zeilenvertauschung und Streichung bzw. Einfügen von Null-Zeilenvektoren in eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ in diagonalisierter Zeilenstufenform überführt werden.
Zeilenraum und somit auch der Kern bleiben dabei unverändert.

Bsp. 1.17

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Korollar 1.3 *Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ sind genau die Linearkombinationen der zugehörigen modifizierten Nicht-Einheits-Spaltenvektoren der diagonalisierten Zeilenstufenform $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ von A .*

Bsp. 1.18 Molkereien (Forts.)

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Zeilenstufenform

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierte Zeilenstufenform ($k = 3, r = 2$) und Kern

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{Kern}(A) = \text{Span}(\{h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}).$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 m_1 + t_2 m_1 + t_3 m_3 = 0 \iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.}$$

Die Menge der Lösungen des durch m_1, m_2, m_3 definierten homogenen Gleichungssystems entspricht dem Ursprungsstrahl in $\mathbb{R}^3$ zur Richtung h_1 .