Vorlesung Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, SoSe 2017

Vortragender Prof. Dr. Bernd Kirchheim
kirchheim@uni-leipzig.de

basierend auf dem Skript von Prof. Dr. Max v. Renesse

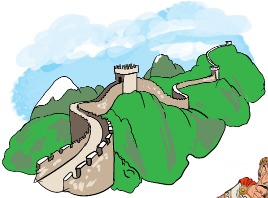
Lineare Algebra

Kapitel 1:

Lineare Algebra

1.1 Der Euklidische Vektorraum

Einführendes Beispiel
Zaubertrunk in alle Welt – Miraculix goes global



Produktionsplanung

ZT soll nicht mehr nur allein von **Mx** gebraut werden. Sondern im letzten freien Dorf wird nur gekocht, was in den Wäldern N,W und S an Geheimzutaten g_1, g_2, g_3 und g_4 gesammelt wird. Die Erträge sind wegen der unterschiedlichen lokalen Flora verschieden - siehe Tabelle nächste Seite,– trotzdem müssen Sie am Ende **genau** im Verhältniss $1 : 1 : 1 : 1$ in den Kessel!

a) Wieviel Pflücker müssen (mindestens) in den einzelnen Wäldern arbeiten, damit insgesamt die Zutaten im richtigen Verhältniss im Dorf ankommen?

b) Lässt sich die Zahl der Sammler enstprechend anpassen, falls die bösen Römer einen der Wälder besetzen?

Wald	g_1	g_2	g_3	g_4
N	0	2	1	3
W	2	2	2	0
S	6	0	3	5

Ein Mathematiker würde Aufgabe a) schreiben als

$$p_1 \vec{w_1} + p_2 \vec{w_2} + p_3 \vec{w_3} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und schnell lösen.
Was soll das bedeuten?

Definition 1.1 *Die Menge*

$$\mathbb{R}^n := \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\,|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$$

heißt **n-dimensionaler Euklidischer Raum**.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **n-dimensionaler Euklidischer Vektor**.

Für $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *heißen* x_i *die* **Koordinaten** *bzw.* **Komponenten**.

Bemerkung

1. *Veranschaulichung im* $\mathbb{R}^2$ *bzw. in* $\mathbb{R}^3$ *als* **'Vektorpfeile'**.
2. *Häufig ohne Pfeilsymbol geschrieben, d.h.* $x \in \mathbb{R}^n$ *statt* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Null-Vektor**.

Definition 1.2 *Vektoren können mit* **Skalaren** $t \in \mathbb{R}$ *multipliziert werden.*

$$t \cdot \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \cdot x_1 \\ \vdots \\ t \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Vektoren derselben Dimension können addiert werden

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung *Es gelten die üblichen Assoziativ- und Distributivgesetze, z.B.*

$$(t_1 + t_2) \cdot \vec{x} = t_1 \cdot \vec{x} + t_2 \cdot \vec{x}.$$

$$t \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = t \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{y}.$$

Linearkombination – Beispiel

Drei Molkereien mit unterschiedlichem Produktausstoß pro Tag:

Molkerei 1 : 1t Joghurt, 1t Quark, 2t Frischkäse, 3t Milch
Molkerei 2 : 1t Joghurt, 1t Quark, 3t Frischkäse, 2t Milch
Molkerei 3 : 1t Joghurt, 1t Quark, 1t Frischkäse, 4t Milch

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gesamtproduktion, wenn 2 Tage Molkerei 1, 3 Tag Molkerei 2 und 2 Tage Molkerei 3 arbeiten:

$$g = 2 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3 *Gegeben* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$*, dann heißt* $w \in \mathbb{R}^n$ **Linearkombination von** $v_1, \cdots v_n$*, falls* $t_1, \cdots t_k \in \mathbb{R}$ *existieren, so dass*

$$w = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k.$$

Definition 1.4 *Gegeben* $M := \{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$*, so heißt die Menge*

$$span(M) := \{w = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k \,|\, t_i \in \mathbb{R}, i = 1 \cdots n\}$$

die lineare Hülle *oder* **der Spann von** M.

Bsp. 1.1 (Forts.) *Menge der mit den Molkereien* m_1 *und* m_2 *produzierbaren Güter-Portfolios*

$$span(\{m_1, m_2\}) = \{(x_1, \cdots x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_2, 2x_1 + 3x_2 = x_3 + x_4\}.$$

Definition 1.5 *Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **linear abhängig***, wenn mindestens ein v_i als Linearkombination der anderen $\{v_j, j \neq i\}$ darstellbar ist.*

Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig***.*

Bsp. 1.2 *$\{m_1, m_2, m_3\}$ ist linear abhänigig, denn*

$$m_3 = 2m_1 - m_2$$

$\rightsquigarrow$ *Das Produktionsportfolio von m_3 kann durch die beiden Molkereien m_1 und m_2 reproduziert werden, m_3 ist in diesem Sinne obsolet.*

Bemerkung.: Da $2m_1 = m_2 + m_3$, ist in der Praxis eher m_1 obsolet.

Satz 1.1 *Eine Menge von Vektoren* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *ist linear unabhängig genau dann, wenn der Null-Vektor* $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ *nur auf triviale Weise als Linearkombination darstellbar ist, d.h. falls*

$$\vec{0} = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k$$

genau dann, wenn

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0.$$

Bsp. 1.3 $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *linear unabhängig.*

Definition 1.6 *Eine Menge von Vektoren* $M = \{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **Erzeugendensystem von** $\mathbb{R}^n$, *wenn*

$$span(M) = \mathbb{R}^n$$

Bsp. 1.4 *Erzeugendensystem von* $\mathbb{R}^2$.

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definition 1.7 *Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $M = \{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Basis** *(von $\mathbb{R}^n$).*

Bsp. 1.5 *Basis von $\mathbb{R}^2$.*

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw. auch

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemerkung *Ein Erzeugendensystem M von $\mathbb{R}^n$ ist eine Basis genau dann, wenn es* **minimal** *ist, d.h. wenn jede echte Teilmenge $M' \subsetneq M$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ mehr ist.*

Bemerkung [1] *Falls* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *Basis und* $t_l \neq 0$ *in*

$$w = t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_n \cdot v_n,$$

so erhält man eine neue Basis durch

$$\{v_1, \cdots, v_{l-1}, w, v_l, \cdots, v_n\}.$$

Satz 1.2 *Jede Basis von* $\mathbb{R}^n$ *hat genau* n *Elemente.*

Bemerkung: Ein schwerer Satz!

[1] 'Austauschsatz von Steinitz'

Definition 1.8 $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *mit*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Standardbasis** *(des $\mathbb{R}^n$).*

1.2 Unterräume

Definition 1.9 *Eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **(linearer) Unterraum**, *falls jede Linearkombination von Elementen von M wieder in M liegt, d.h.*

$$t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k \in M$$

für alle $v_1, v_2, \cdots, v_k \in M$, $t_i \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

1. *Kriterium: M Unterraum gdw. $\forall u, v \in M \forall t \in \mathbb{R} : t \cdot u + v \in M$.*
2. *Man kann span(N) auch für eine unendliche/beliebige Menge als*

$$span(N) = \{t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k \ : \ k \in \mathbb{N}_+, t_i \in \mathbb{R}, v_i \in N\},$$

das heißt, als Menge aller (endlichen!!) Linearkombinationen von Vektoren aus N definieren.

3. *Für jede Menge M ist $M \subset span(M)$ ein Unterraum, sogar der kleinste Unterraum, der M enthält.*
4. *M ist Unterraum genau dann, wenn $M = span(M)$.*
5. *$x \in M \Rightarrow (-1)x + x = 0 \in M$, also $\{0\}$ ist der kleinste aller möglichen Unterräume.*

Bsp. 1.6

1. *$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ kein Unterraum*
2. *$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$ Unterraum*
3. *Die Unterräume in $\mathbb{R}^2$ sind alle Ursprungsgeraden und die Menge $\{\vec{0}\}$.*
4. *Die Unterräume in $\mathbb{R}^3$ sind alle Ursprungsgeraden und alle Ursprungsebenen und die Menge $\{\vec{0}\}$.*
5. *Wenn M und N Unterraum, dann ist auch $M \cap N$ ein Unterraum, aber $M \cup N$ im Allgemeinen nicht (genauer $M \cup N$ Unterraum gdw $M \subset N$ oder $N \subset M$)*

Definition 1.10 *Eine Teilmenge N des Unterraums M heißt* **Erzeugendensystem** *von M wenn $span(N) = M$.*
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystems eines Unterraums $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Basis von** *M.*

Bsp. 1.7 *Unterraum in $\mathbb{R}^3$*

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Basis

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Satz 1.3 *Alle Basen eines Unterraums $M \subset \mathbb{R}^n$ haben stets dieselbe (endliche!, $\leq n$) Anzahl von Elementen.*

Beweis so schwer wie für $M = \mathbb{R}^n$, wieder auf Steinitzschen Austauschsatz beruhend.

Definition 1.11 *Die Anzahl der Elemente einer Basis für einen Unterraum $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Dimension von** *M, bezeichnet* $\mathbf{dim(M)}$.

Bsp. 1.8 $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_2, x_3 = x_4\} \subset \mathbb{R}^4$,
Basis z.B. $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\} \rightsquigarrow dim(M) = 2$.

Bemerkung *Wichtige Kriterien sind*

1. *Die Menge* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine Basis vom Unterraum* $M \subset \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn für jedes* $w \in M$ *eindeutige Koeffizienten* $(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ *existieren, so dass*

$$w = t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k.$$

2. *Ein Erzeugendensystem* N *eines Unterraumes* M *ist Basis von* M *gdw die Anzahl der Elemente in* N *gleich* $\mathbf{dim}(\mathbf{M})$ *ist.*
3. *Eine linear unabhängige Menge* N *in einem Unterraum* M *ist eine Basis gdw die Anzahl der Elemente in* N *gleich* $\mathbf{dim}(\mathbf{M})$ *ist.*
4. *bevor man 2. oder 3. nutzen kann, um Basen zu finden, muss man aber die* $\mathbf{dim}(M)$ *kennen, als meist/ohne weitere Theorie mindestens eine Basis bestimmen.*

Bsp. 1.9 *Molkereien (Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nachfrage

$$n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Kann die Nachfrage durch geeignete Laufzeiten t_1, t_2 und t_3 exakt bedient werden, d.h existieren t_1, t_2, t_3, so dass

$$n = t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3 \text{ ?}$$

Gibt es verschiedene Kombinationen von (t_1, t_2, t_3), um n zu produzieren?

Die Gleichung

$$n = t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3$$

schreibt sich zeilenweise $\rightsquigarrow$ System von vier Gleichungen für drei Variablen (t_1, t_2, t_3).

Es existiert **mindestens** eine Lösung (t_1, t_2, t_3) genau dann, wenn

$$n \in \operatorname{span}(\{m_1, m_2, m_3\}) \subset \mathbb{R}^4.$$

Es existieren mehr als eine (d.h. unendlich viele) Lösungen genau dann, wenn $n \in \operatorname{span}(\{m_1, m_2, m_3\})$ und

$$\{m_1, m_2, m_3\} \text{ linear abhängig.}$$

Die Lösung kann niemals **eindeutig** existieren wenn

$$\{m_1, m_2, m_3\} \text{ linear abhängig.}$$

1.3 Sklarprodukt und Orthogonalität

Siehe auch VL Woche 1 für mehr Details zu 1. Teil dieses Kapitels

Definition 1.12 *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist das* **Skalarprodukt** *definiert als*

$$x \bullet y := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Bsp. 1.10 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

Lemma 1.1 *Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x \bullet y = y \bullet x, (tx) \bullet y = t(x \bullet y),$$

$$(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z.$$

Definition 1.13 *Die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als*

$$\|x\| := \sqrt{x \bullet x}. = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

Definition 1.14 *Zwei Vektoren* $x, y \in R^n$ **stehen senkrecht zueinander** *bzw.* **sind orthogonal** – *wir schreiben* $x \perp y$, *falls*

$$x \bullet y = 0.$$

Bemerkung *Dann* x *und* y *orthogonal* $\Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Bsp. 1.11 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *sind orthogonal.*

Definition 1.15 *Sei* $A \subset \mathbb{R}^d$, *dann heißt*

$$A^{\perp} := \{x \in \mathbb{R}^d \,|x \bullet a = 0 \text{ für alle } a \in A\} \subset \mathbb{R}^d$$

das **orthogonale Komplement** *von* A.

Lemma 1.2 $A^{\perp}$ *ist ein Unterraum von* $\mathbb{R}^d$

Satz 1.4 *Sei $H \subset \mathbb{R}^d$ ein Unterraum, dann lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eindeutig zerlegen in*

$$x = x^H + x^\perp$$

mit $x^H \in H$ und $x^\perp \in H^\perp$

Bemerkung

- x^H *heißt* **orthogonale Projektion von x auf H.**
- x_H *ist das Element von H mit minimalem Abstand zu x.*
  In der Tat, für jedes $y \in H$ gilt $x_H - y \in H$ und also $x^\perp$, $y - x_H$ orthogonal, also

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 = \|(x-x_H)+(x_H-y)\|^2 &= \|x^\perp + (x_H - y)\|^2 \\ &= \|x^\perp\|^2 + \|x_H - y\|^2 \geq \|x^\perp\|^2.\end{aligned}$$

Bew: *Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei*

$$x = x_1^H + x_1^\perp = x_2^H + x_2^\perp$$

so gilt

$$x_1^H - x_2^H = x_1^\perp - x_2^\perp \in H \cap H^\perp.$$

Also

$$\begin{aligned} \|x_1^H - x_2^H\|^2 &= (x_1^H - x_2^H) \bullet (x_1^H - x_2^H) \\ &= (x_1^H - x_2^H) \bullet (x_1^\perp - x_2^\perp) = 0. \end{aligned}$$

Folglich

$$x_1^H - x_2^H = 0$$

und damit auch

$$x_1^\perp = x_2^\perp.$$

Existenz der Zerlegung: Durch Induktion nach $d = \dim(H)$.

Induktionsanfang

Falls $d = 0$ ist $H = \{0\}$ und $H^\perp = \mathbb{R}^d$, d.h.

$$x = 0 + x.$$

Induktionsschritt

Sei $\{h_1, \cdots, h_{d-1}, h_d\}$ Basis von H, setze
$H' := \text{span}(\{h_1, \cdots, h_{d-1}\})$, so gilt wg. Induktionsvoraussetzung

$$x = x^{H'} + \tilde{x}, \quad h_d = h_d^{H'} + \tilde{h}_d$$

für geeignete $x^{H'}, h_d^{H'} \in H'$ und $\tilde{x}, \tilde{h}_d$ orthogonal zu H'. Beachte:
$H = \text{span}(H' \cup \{\tilde{h}_d\})$ da h_d in dieser lin. Hülle!
Sei

$$x^{\tilde{h}_d} := \frac{(\tilde{x} \bullet \tilde{h}_d)}{\|\tilde{h}_d\|^2} \tilde{h}_d$$

und

$$x^H := x^{H'} + x^{\tilde{h}_d}, \quad x^\perp := \tilde{x} - x^{\tilde{h}_d}.$$

Dann gilt $x^H \in H$, $x^\perp$ orthogonal zu H' und zu $\tilde{h}_d$ **also zu** H, sowie

$$x = x^H + x^\perp.$$

Existenz via Gram-Schmidt Algorithmus

Definition 1.16 *Sei H ein UR von $\mathbb{R}^n$, dann heisst $\{v_1, \dots, v_d\}$ eine ONB (Orthonormalbasis) von H wenn*

1. $v_i \bullet v_j = 0$ *wenn* $i \neq j$, $\|v_i\| = 1 \forall i \leq d$
2. $\{v_1, \dots, v_d\}$ *ist Erzeugendensystem von H*

Bemerkung *(1) wird oft abgekürzt als $v_i \bullet v_j = \delta_i^j$ (Kroneckerdelta), und impliziert bereits lineare Unabhängigkeit! Eine ONB ist also immer eine (besonders gute) Basis*

Satz 1.5 (Graham-Schmidt) *Jeder UR H von $\mathbb{R}^n$ hat eine ONB.*

Lemma 1.3 *Sei $\{v_1, \dots, v_d\}$ eine ONB von H UR in $\mathbb{R}^n$, dann*

1. $\forall x \in H : x = \sum_{i=1}^{d} (x \bullet v_i) v_i$, *d.h. wir finden die Koeffizienten in der darstellenden Linearkombination superleicht!*
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *ist* $x^H = \sum_{i=1}^{d} (x \bullet v_i) v_i$ *und* $x^\perp = x - x^H$ *die in Satz 1.4 geforderte Zerlegung:* $x = H^H + x^\perp$, $x^H \in H$ *und* $x^\perp \in H^\perp$.

Existenz via Gram-Schmidt Algorithmus II

Beweis Lemma1.3 Sei $\{v_1, \dots, v_d\}$ eine ONB von H UR in $\mathbb{R}^n$

1. $\forall x \in H : x = \sum_{i=1}^{d} (x \bullet v_i) v_i$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ist $x^H = \sum_{i=1}^{d} (x \bullet v_i) v_i$ und $x^\perp = x - x^H$ die in Satz 1.4 geforderte Zerlegung: $x = H^H + x^\perp$, $x^H \in H$ und $x^\perp \in H^\perp$.

1): $x \in \mathrm{span}(\{v_1, \dots, v_d\}) \Rightarrow \exists t_i \in \mathbb{R}$ mit $x = \sum_{i=1}^{d} t_i v_i$. Wir nutzen Lemma 1.1 (Bilinearität von $\bullet$)$\Rightarrow$ für jedes $j \le d$ gilt

$$x \bullet v_j = (\sum_{i=1}^{d} t_i v_i) \bullet v_j = \sum_{i=1}^{d} (t_i v_i) \bullet v_j = \sum_{i=1}^{d} t_i (v_i \bullet v_j) = t_j,$$

da $v_j \bullet v_j = 1$ und alle anderen $v_i \bullet v_j = 0$. Formel in 1) folgt.
2): Wie zuvor $x^H \bullet v_i = (x \bullet v_i)$, also $(x^H - x) \bullet x_i = 0$.
Damit $v_i \in \{x - x^H\}^\perp \forall i \le d$,also
$H = \mathrm{span}(\{v_1, \dots, v_d\}) \subset \{x - x^H\}^\perp$, d.h. $x^\perp = x - x^H \in H^\perp$.
Beweis Satz 1.5: folgt nun leicht Induktion in $\dim(H)$ und Lemma 1.3.2)Das neue $v_{d+1}^\perp$ noch auf Länge 1 normieren.

Korollar 1.1 *Für einen Unterraum $H \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$span(H \cup H^\perp) = \mathbb{R}^n \quad H \cap H^\perp = 0 = \{0\}.$$

Insbesondere gilt

$$\dim(H^\perp) = n - \dim(H)$$

und

$$(H^\perp)^\perp = H.$$

Bew: *Die ersten beiden Behauptungen folgen direkt aus Existenz und Eindeutigkeit der orthogonalen Zerlegung.*
Die Schlussfolgerung über Dimensionen folgt sofort, wenn man eine Basis $\{v_1, \dots, v_d\}$ von H und eine Basis $\{w_1, \dots, w_k\}$ von $H^\perp$ betrachtet. Man sieht leicht, dass

$$\{v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_k\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, also $n = d + k$.
Zuletzt: Klar ist $H \subset (H^\perp)^\perp$, und wegen Vorherigem sind Dimensionen gleich, also die Räume gleich.

1.4 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.17 *Es seien $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$, dann heißt das Problem*

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots t_k v_k \stackrel{!}{=} 0$$

für unbekanntes

$$(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$$

ein **lineares homogenes Gleichungssystem** *der Größe $n \times k$.*

Bemerkung *Schreibt man* $v_j = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ \vdots \\ v_j^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \cdots, k$, *stellt sich das homogene Gleichungssystem zeilenweise dar als*

$$\begin{array}{ccccc} v_1^1 t_1 + & v_2^1 t_2 + & \cdots + & v_k^1 t_k \stackrel{!}{=} & 0 \\ v_1^2 t_1 + & v_2^2 t_2 + & \cdots + & v_k^2 t_k \stackrel{!}{=} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^n t_1 + & v_2^n t_2 + & \cdots + & v_k^n t_k \stackrel{!}{=} & 0 \end{array}$$