

Vorlesung Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, SoSe 2017

Vortragender Prof. Dr. Bernd Kirchheim
kirchheim@uni-leipzig.de

basierend auf dem Skript von Prof. Dr. Max v. Renesse

Lineare Algebra

Der Euklidische Vektorraum

Unterräume

Skalarprodukt und Orthogonalität

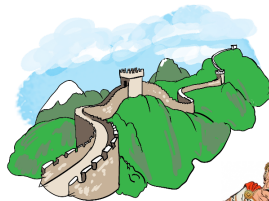
Kapitel 1:

Lineare Algebra

1.1 Der Euklidische Vektorraum

Einführendes Beispiel

Zaubertrunk in alle Welt – Miraculix goes global



©www.ClipartsFree.d

Produktionsplanung



ZT soll nicht mehr nur allein von **Mx** gebraut werden. Sondern im letzten freien Dorf wird nur gekocht, was in den Wäldern N,W und S an Geheimzutaten g_1, g_2, g_3 und g_4 gesammelt wird. Die Erträge sind wegen der unterschiedlichen lokalen Flora verschieden - siehe Tabelle nächste Seite,– trotzdem müssen Sie am Ende **genau** im Verhältniss $1 : 1 : 1 : 1$ in den Kessel!

- a) Wieviel Pflücker müssen (mindestens) in den einzelnen Wäldern arbeiten, damit insgesamt die Zutaten im richtigen Verhältniss im Dorf ankommen?
- b) Lässt sich die Zahl der Sammler entsprechend anpassen, falls die bösen Römer einen der Wälder besetzen?



Wald	g_1	g_2	g_3	g_4
N	0	2	1	3
W	2	2	2	0
S	6	0	3	5

Ein Mathematiker würde Aufgabe a) schreiben als

$$p_1 \vec{w}_1 + p_2 \vec{w}_2 + p_3 \vec{w}_3 = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und schnell lösen.

Was soll das bedeuten?

Definition 1.1 Die Menge

$$\mathbb{R}^n := \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \}$$

heißt **n-dimensionaler Euklidischer Raum**.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt **n-dimensionaler Euklidischer Vektor**.

Für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißen x_i die **Koordinaten** bzw. **Komponenten**.

Bemerkung

- 1 Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$ bzw. in $\mathbb{R}^3$ als '**Vektorpfeile**'.
- 2 Häufig ohne Pfeilsymbol geschrieben, d.h. $x \in \mathbb{R}^n$ statt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- 3 $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ heißt **Null-Vektor**.

Definition 1.2 Vektoren können mit **Skalaren** $t \in \mathbb{R}$ multipliziert werden.

$$t \cdot \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \cdot x_1 \\ \vdots \\ t \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Vektoren derselben Dimension können addiert werden

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Es gelten die üblichen Assoziativ- und Distributivgesetze, z.B.

$$(t_1 + t_2) \cdot \vec{x} = t_1 \cdot \vec{x} + t_2 \cdot \vec{x}.$$

$$t \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = t \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{y}.$$

Linearkombination – Beispiel

Drei Molkereien mit unterschiedlichem Produktausstoß pro Tag:

Molkerei 1 : 1t Joghurt, 1t Quark, 2t Frischkäse, 3t Milch

Molkerei 2 : 1t Joghurt, 1t Quark, 3t Frischkäse, 2t Milch

Molkerei 3 : 1t Joghurt, 1t Quark, 1t Frischkäse, 4t Milch

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gesamtproduktion, wenn 2 Tage Molkerei 1, 3 Tag Molkerei 2 und 2 Tage Molkerei 3 arbeiten:

$$g = 2 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3 Gegeben $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt $w \in \mathbb{R}^n$
Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$, falls $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ existieren,
so dass

$$w = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k.$$

Definition 1.4 Gegeben $M := \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, so heißt die Menge
 $\text{span}(M) := \{w = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k \mid t_i \in \mathbb{R}, i = 1 \cdots n\}$
die lineare Hülle oder der Spann von M .

Bsp. 1.1 Menge der mit den Molkereien m_1 und m_2 produzierbaren
(Forts.) Güter-Portfolios

$$\text{span}(\{m_1, m_2\}) = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, 2x_1 + 3x_2 = x_3 + x_4\}.$$

Definition 1.5 Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **linear abhängig**, wenn mindestens ein v_i als Linearkombination der anderen $\{v_j, j \neq i\}$ darstellbar ist.
Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig**.

Bsp. 1.2 $\{m_1, m_2, m_3\}$ ist linear abhängig, denn

$$m_3 = 2m_1 - m_2$$

$\leadsto$ Das Produktionsportfolio von m_3 kann durch die beiden Molkereien m_1 und m_2 reproduziert werden, m_3 ist in diesem Sinne **obsolet**.

Bemerkung.: Da $2m_1 = m_2 + m_3$, ist in der Praxis eher m_1 **obsolet**.

Satz 1.1 *Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ist linear unabhängig genau dann, wenn der Null-Vektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ nur auf triviale Weise als Linearkombination darstellbar ist, d.h. falls*

$$\vec{0} = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k$$

genau dann, wenn

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0.$$

Bsp. 1.3 $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *linear unabhängig.*

Definition 1.6 Eine Menge von Vektoren $M = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$** , wenn

$$\text{span}(M) = \mathbb{R}^n$$

Bsp. 1.4 Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definition 1.7 *Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $M = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Basis** (von $\mathbb{R}^n$).*

Bsp. 1.5 *Basis von $\mathbb{R}^2$.*

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw. auch

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemerkung *Ein Erzeugendensystem M von $\mathbb{R}^n$ ist eine Basis genau dann, wenn es **minimal** ist, d.h. wenn jede echte Teilmenge $M' \subsetneq M$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ mehr ist.*

Bemerkung ¹Falls $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis und $t_l \neq 0$ in

$$w = t_1 \cdot v_1 + \dots + t_n \cdot v_n,$$

so erhält man eine neue Basis durch

$$\{v_1, \dots, v_{l-1}, w, v_{l+1}, \dots, v_n\}.$$

Satz 1.2 Jede Basis von $\mathbb{R}^n$ hat genau n Elemente.

Bemerkung: Ein schwerer Satz!

¹'Austauschsatz von Steinitz'

Definition 1.8 $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Standardbasis** (des $\mathbb{R}^n$).

1.2 Unterräume

Definition 1.9 Eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(linearer) Unterraum**, falls jede Linearkombination von Elementen von M wieder in M liegt, d.h.

$$t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k \in M$$

für alle $v_1, v_2, \dots, v_k \in M$, $t_i \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

- 1 Kriterium: M Unterraum gdw. $\forall u, v \in M \forall t \in \mathbb{R} : t \cdot u + v \in M$.
- 2 Man kann $\text{span}(N)$ auch für eine unendliche/beliebige Menge als

$$\text{span}(N) = \{t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k : k \in \mathbb{N}_+, t_i \in \mathbb{R}, v_i \in N\},$$

das heißt, als Menge aller (endlichen!!) Linearkombinationen von Vektoren aus N definieren.

- 3 Für jede Menge M ist $M \subset \text{span}(M)$ ein Unterraum, sogar der kleinste Unterraum, der M enthält.
- 4 M ist Unterraum genau dann, wenn $M = \text{span}(M)$.
- 5 $x \in M \Rightarrow (-1)x + x = 0 \in M$, also $\{0\}$ ist der kleinste aller möglichen Unterräume.

Bsp. 1.6

- 1 $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ kein Unterraum
- 2 $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$ Unterraum
- 3 Die Unterräume in $\mathbb{R}^2$ sind alle Ursprungsgeraden und die Menge $\{\vec{0}\}$.
- 4 Die Unterräume in $\mathbb{R}^3$ sind alle Ursprungsgeraden und alle Ursprungsebenen und die Menge $\{\vec{0}\}$.
- 5 Wenn M und N Unterraum, dann ist auch $M \cap N$ ein Unterraum, aber $M \cup N$ im Allgemeinen nicht (genauer $M \cup N$ Unterraum gdw $M \subset N$ oder $N \subset M$)

Definition 1.10 Eine Teilmenge N des Unterraums M heißt **Erzeugendensystem** von M wenn $\text{span}(N) = M$.
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Unterraums $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Basis von M** .

Bsp. 1.7 Unterraum in $\mathbb{R}^3$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Basis

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Satz 1.3 *Alle Basen eines Unterraums $M \subset \mathbb{R}^n$ haben stets dieselbe (endliche!, $\leq n$) Anzahl von Elementen.*

Beweis so schwer wie für $M = \mathbb{R}^n$, wieder auf Steinitzschen Austauschsatz beruhend.

Definition 1.11 *Die Anzahl der Elemente einer Basis für einen Unterraum $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Dimension von M** , bezeichnet **$\dim(M)$** .*

Bsp. 1.8 $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\} \subset \mathbb{R}^4$,
Basis z.B. $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} \rightsquigarrow \dim(M) = 2$.

Bemerkung *Wichtige Kriterien sind*

- 1 Die Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Basis vom Unterraum $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn für jedes $w \in M$ eindeutige Koeffizienten $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ existieren, so dass

$$w = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k.$$

- 2 Ein Erzeugendensystem N eines Unterraumes M ist Basis von M gdw die Anzahl der Elemente in N gleich **dim(M)** ist.
- 3 Eine linear unabhängige Menge N in einem Unterraum M ist eine Basis gdw die Anzahl der Elemente in N gleich **dim(M)** ist.
- 4 bevor man 2. oder 3. nutzen kann, um Basen zu finden, muss man aber die **dim(M)** kennen, als meist/ohne weitere Theorie mindestens eine Basis bestimmen.

Bsp. 1.9 *Molkereien (Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nachfrage

$$n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Kann die Nachfrage durch geeignete Laufzeiten t_1 , t_2 und t_3 exakt bedient werden, d.h existieren t_1, t_2, t_3 , so dass

$$n = t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3 ?$$

Gibt es verschiedene Kombinationen von (t_1, t_2, t_3) , um n zu produzieren?

Die Gleichung

$$n = t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3$$

schreibt sich zeilenweise $\leadsto$ System von vier Gleichungen für drei Variablen (t_1, t_2, t_3) .

Es existiert **mindestens** eine Lösung (t_1, t_2, t_3) genau dann, wenn

$$n \in \text{span}(\{m_1, m_2, m_3\}) \subset \mathbb{R}^4.$$

Es existieren mehr als eine (d.h. unendlich viele) Lösungen genau dann, wenn $n \in \text{span}(\{m_1, m_2, m_3\})$ und

$\{m_1, m_2, m_3\}$ linear abhängig.

Die Lösung kann niemals **eindeutig** existieren wenn

$\{m_1, m_2, m_3\}$ linear abhängig.

1.3 Skalarprodukt und Orthogonalität

Definition 1.12 Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist das **Skalarprodukt** definiert als

$$x \bullet y := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Bsp. 1.10 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

Lemma 1.1 Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \bullet y = y \bullet x, (tx) \bullet y = t(x \bullet y),$$

$$(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z.$$

Definition 1.13 Die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$\|x\| := \sqrt{x \bullet x}.$$

Bsp. 1.11 $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Bemerkung Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke gibt auch in beliebigen Dimensionen ein Konzept von "rechtem Winkel"

Definition 1.14 Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ **stehen senkrecht zueinander bzw. sind orthogonal** – wir schreiben $x \perp y$, falls

$$x \bullet y = 0.$$

Bemerkung Da

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2) &= (x + y) \bullet (x + y) - (x \bullet x + y \bullet y) \\ &= x \bullet (x + y) + y \bullet (x + y) - (x \bullet x + y \bullet y) \\ &= (x \bullet x + x \bullet y) + (y \bullet x + y \bullet y) - (x \bullet x + y \bullet y) \\ &= x \bullet y + y \bullet x = 2x \bullet y \end{aligned}$$

gilt x und y orthogonal $\Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Bsp. 1.12 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

Definition 1.15 Sei $A \subset \mathbb{R}^d$, dann heißt

$$A^\perp := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \bullet a = 0 \text{ für alle } a \in A\} \subset \mathbb{R}^d$$

das **orthogonale Komplement** von A .

Lemma 1.2 $A^\perp$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^d$

Bew: Sei $x, y \in A^\perp$, $t \in \mathbb{R}$, zu zeigen $z = tx + y \in A^\perp$. In der Tat folgt aus Lemma 1.1 $\forall a \in A$:

$$z \bullet a = (tx + y) \bullet a = t(x \bullet a) + (y \bullet a) = 0.$$

Satz 1.4 Sei $H \subset \mathbb{R}^d$ ein Unterraum, dann lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eindeutig zerlegen in

$$x = x^H + x^\perp$$

mit $x^H \in H$ und $x^\perp \in H^\perp$