Definition 1.25

- *Gegeben* $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ *und* $b \in \mathbb{R}^n$*, dann heißt das Problem*

$$t_1 v_1 + \cdots t_k v_k \overset{!}{=} b$$

  ein (inhomogenes) **lineares Gleichungssystem** *der Größe* $n \times k$*.*
  $b \in \mathbb{R}^k$ *heißt* **rechte Seite***.*
- *Falls* $t = (t_1, t_2, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ *die obige Gleichung erfüllt, so heißt es* **Lösung** *des Gleichungssystems.*

Bsp. 1.19 *(Molkereien, Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nachfrage

$$n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finde $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$*, so dass*

$$t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3 = n.$$

Inhomogenes lineares Gleichungssystem der Größe 4×3.

Bemerkung *Für ein (homogenes oder inhomogenes) Gleichungssystem sind drei Fälle möglich:*

- *Das Gleichungssystem hat keine Lösung.*
- *Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.*
- *Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.*

In den Fällen 2 bzw. 3 heißt das Gleichungssystem **(eindeutig) lösbar**, *in Fall 1* **nicht lösbar.**

Lemma 1.5 *Es seien $t \in \mathbb{R}^k$ und $s \in \mathbb{R}^k$ zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems (homogen oder inhomogen). Dann ist*

$$s - t \in \mathbb{R}^k$$

eine Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Bew:

$$\begin{aligned} 0 = b - b &= (s_1 v_1 + \cdots s_k v_k) - (t_1 v_1 + \cdots t_k v_k) \\ &= (s_1 - t_1) v_1 + \cdots + (s_k - v_k) v_k. \end{aligned}$$

Korollar 1.4 *Sei t eine Lösung des Gleichungssystems $(A|b) \in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}$. Dann sind alle weiteren Lösungen von der Form*

$$\tilde{t} = t + n, n \in Kern(A).$$

Bemerkung *In der obigen Darstellung der Lösungsmenge nennt man $t \in \mathbb{R}^k$ gelegentlich eine* ***spezielle Lösung****.*

Bemerkung *Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem wird eindeutig durch die*

- **Koeffizientenmatrix** $A = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *und* **rechte Seite** $b \in \mathbb{R}^n$
- *bzw. durch die* **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_k & b \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}.$$

beschrieben.

Lemma 1.6 *Unter zulässigen Zeilenoperationen auf einer erweiterten Koeffizientenmatrix eines inhomogenen Gleichungssystems bleibt die Lösungsmenge unverändert.*

Satz 1.11 *Es sei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Dann ist das Gleichungssystem lösbar, genau dann wenn*

$$Rang(A) = Rang(A|b).$$

Korollar 1.5 *Ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizienenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{b})$ in Zeilenstufenform ist lösbar genau dann, wenn*

$$Stufenanzahl(\tilde{A}) = Stufenanzahl(\tilde{A}|\tilde{b}).$$

Bsp. 1.20 *(Molkereien, Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b) := (m_1\ m_2\ m_3 \mid n)$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform von $(A|b)$

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Rang(\tilde{A}|\tilde{b}) = 3 \neq 2 = Rang(\tilde{A}).$$

$\Rightarrow$ *Gleichungssystem* $(A|b) = (m_1\ m_2\ m_3\ n)$ *nicht lösbar.*

Bsp. 1.21 *(Molkereien, Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}, n' = \begin{pmatrix}8\\8\\16\\24\end{pmatrix}.$$

Zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b') := (m_1\ m_2\ m_3 \mid n')$

$$(A|b) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 8\\ 2 & 3 & 1 & 16\\ 3 & 2 & 4 & 24\end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform von $(A|b')$

$$(\tilde{A}|\tilde{b}') = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ *Gleichungssystem* $(A|b') = (m_1\ m_2\ m_3\ n')$ *lösbar.*

Lemma 1.7 *Es sei $(A|b) \in \mathbb{R}^{n(k+1)}$ ein lösbares inhomogenes lineares Gleichungssystem in Zeilenstufenform. Dann ist eine spezielle Lösung $t \in \mathbb{R}^k$ gegeben durch*

$$t_j = \begin{cases} b_i & \text{falls } A \text{ in der } j\text{-ten Spalte die } i\text{-te Stufe hat,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} .$$

Bsp. 1.22 *Gegeben das inhomog. Gleichungssystem $(A|b)$ in Zeilenstufenform*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann ist eine spezielle Lösung gegeben durch

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bsp. 1.23 *(Molkereien, Forts.). Gegeben* $(A|b') = (m_1\ m_2\ m_3\ n')$.

$$(\tilde{A}|\tilde{b}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichungssystem $(A|b') = (m_1\ m_2\ m_3\ n')$ *lösbar.*
Spezielle Lösung

$$t = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\leadsto$ 'Kochrezept' Gegeben Gleichungssystem $(A|b) \in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}$.

1. Überführe $(A|b)$ durch zulässige Zeilenoperationen in Zeilenstufenform $(\tilde{A}|\tilde{b})$
2. Gleichungssystem lösbar, falls
$$\text{Stufenanzahl } (\tilde{A}) = \text{Stufenanzahl } (\tilde{A}|\tilde{b}).$$
3. Bestimme spezielle Lösung $t \in \mathbb{R}^k$.
4. Bestimme eine Basis von $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(\tilde{A})$ durch Überführung von $\tilde{A}$ in diagonalisierte Zeilenstufenform $\hat{(A)}$.
5. Bestimmung von $\text{Kern}(\hat{A}) = \text{Kern}(A)$.
6. Alle Lösungen sind von der Form
$$s = t + n, \quad n \in \text{Kern}(A).$$

Bsp. 1.24 *(Molkereien, Forts.). Gegeben* $(A|b^*) = (m_1\ m_2\ m_3\ n^*)$.

$$(A|b^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform

$$(\tilde{A}|\tilde{b}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichungssystem lösbar. Spezielle Lösung

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisierte Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen sind von der Form

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung *Will man eine Menge von Vektoren* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *auf* **lineare Unabhängigkeit prüfen**, *kann man wie folgt vorgehen.*

1. *Bilde die zugehörige Matrix* $A = (v_1 \ \cdots v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *mit Spaltenvektoren* $v_1, \cdots, v_k$.
2. *Transformiere* A *auf Zeilenstufenform* $\tilde{A}$ *und bestimme*

$$Rang(A) = Rang(\tilde{A}).$$

3. *Falls* $Rang(A) = k$, *ist die Menge* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *linear unabhänig, falls* $Rang(A) < k$ *linear abhängig.*

Bemerkung

- *Der Zeilenraum einer Matrix ändert sich nicht bei zulässigen Zeilenoperationen.*
- *Die Zeilenvektoren einer Matrix in Zeilenstufenform nach Streichung aller Null-Zeilen bilden eine* **Basis des Zeilenraums***.*

Bemerkung *Gegeben der lineare Unterraum*

$$V = Span\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Man kann eine **Basis von** $V \subset \mathbb{R}^n$ **finden** *wie folgt.*

- *Bilde die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

  mit Zeilenvektoren $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$.
- *Transformiere* A *in Zeilenstufenform* $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$
- *Die Zeilenvektoren ungleich* $\vec{0}$ *in* $\tilde{A}$ *bilden eine Basis von* V.

Bsp. 1.25 *Gegeben die Fabriken*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein minimales System von Fabriken an mit gleicher Menge von kombinierten Produktions-Portfolios.
Matrix von zugehörigen Zeilenvektoren

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 6 & 12 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zugehörige Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 111 & -136 \\ 0 & 22 & 0 & 24 & 52 \\ 0 & 0 & 11 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Minimales System entspricht den ersten drei Zeilenvektoren ($\rightsquigarrow$ Basis).