Mathematik für Wirtschaftswissenschaften II
Universität Leipzig

Sommersemester 2017, Übungsserie 1

1. Aufgabe

1. Gegeben sei der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Stellen Sie grafisch x, $\frac{5}{2} \cdot x$ und $x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

2. * Sei
   $$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } z = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Stellen Sie die Menge
   $$M = \{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z \ : \ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$
   dar. *[Hinweis: Betrachten zunächst Spezialfälle wie $\alpha = 0$ oder $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.]*

2. Aufgabe

Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren ein Erzeugendensystem bilden und ob sie linear unabhängig sind.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,
2. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0, \end{pmatrix} \right\}$.

3. Aufgabe

Welche der folgenden Mengen bilden einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Aussage

1. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3, \end{pmatrix} \right\}$,

2. $N = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$,

3. $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$.

4. Aufgabe

Florian, Erik und Katrin möchten Whiskey-Cola trinken, sind sich jedoch nicht über das Mischungsverhältnis einig. Florian mischt die erste Hälfte der Whiskey-Flasche mit Cola im Verhältnis 1:4. Erik mag es stärker, und mischt die zweite Hälfte im Verhältnis 2:1. Wie muss Katrin die beiden Mischungen kombinieren, das heisst welche Volumina jeweils nehmen, um 42cl Whiskey-Cola im Verhältnis 4:10 zu erhalten.

5. Aufgabe für Liebhaber der Theorie

In dieser Aufgabe sei immer $v_1, \ldots, v_k$ eine Menge LU (linear unabhängiger) Vektoren.

1. Zeigen Sie, dass

$$t_1 \cdot v_1 + \ldots t_k \cdot v_k = s_1 \cdot v_1 + \ldots s_k \cdot v_k \Rightarrow t_1 = s_1 \wedge t_2 = s_2 \wedge \ldots \wedge t_k = s_k.$$

2. Sei $w \notin \operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$, zeigen Sie, dass $w, v_1, \ldots, v_k$ LU ist.

3. Sei $w = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i$ und $t_j \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_k \text{ LU ist.}$$

4. Sei $w \neq 0$ beliebig. Zeigen Sie, es gibt ein $j \leq k$, so dass

$$v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_k \text{ LU ist.}$$

5. * Seien $w_1, \ldots, w_l$ jeweils ungleich Null und

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \operatorname{span}(\{w_1, \ldots, w_l\}).$$

Zeigen Sie, dass $k \leq l$ und also, dass in einem Unterraum H jede Basis die selbe Länge hat. *[Hinweis: Beweisen Sie mittels 4. Folgendes: wenn $k > l$ dann gibt es $i_{l+1} < \ldots < i_k$ so dass $\{w_1, \ldots, w_l, v_{i_l+1}, \ldots, v_{i_k}\}$ LU, aber dies ist unmöglich.]*