Vorlesung Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, WS 16/17

Prof. Dr. Bernd Kirchheim
Mathematisches Institut
kirchheim@math.uni-leipzig.de

Kapitel 1: Grundlagen

Kap.1 : Grundlagen

Inhalt

- Aussagenlogik
- Naive Mengenlehre
- Zahlen (wie die Alten Griechen sie kannten)
- Die reellen Zahlen

1.3 Zahlen

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. L. Kronecker (1823-91).

Diese von dem Algebraiker Kronecker verkündete Maxime enthüllt mehr über seine Vergangenheit als eines durch Börsenspekulation reich gewordenen Bankiers, denn über seine philosophische Einsicht. R.Thom (Katastrophentheoretiker, sieht Geometrie - Kontinuität als grundlegend)

Das Prinzip Die Menge der **natürlichen Zahlen**

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ entsteht durch sukzessives Hinzufügen ('Addition') von '1'.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ - Peano Axiome

Definition 1.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind eine Menge (mit einem ausgezeichneten Element 0) und eine Nachfolgerrelation

$$\mathcal{NF} =_C \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

so dass Folgendes gilt:

PEANO AXIOME

- $0 \in \mathbb{N}$ (schon gesagt)
 - $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $(n, n') \in \mathcal{NF}$
wir sagen n' ist der **Nachfolger** von n
 - $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 0$ (Null hat keinen Vorgänger)
 - $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : (n' = m' \Rightarrow n = m)$
- IP $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (0 \in X \wedge (\forall n \in X : n' \in X)) \Rightarrow X = \mathbb{N}$

Induktionsprinzip

eine etwas weniger formale Erklärung gibt es im Video

<https://www.youtube.com/watch?v=an34mviy-jE>

Warnung: enthält einen kleinen Fehler. Wer findet ihn?

Bemerkung $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$

Operationen d.h. immer zulässige Rechenoperation

Addition definiert durch $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n + 0 = n \wedge n + m' = (n + m)')$

Multiplikation definiert durch $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n \cdot 0 = 0 \wedge n \cdot m' = n \cdot m + n)$

Bemerkung *Wir bezeichnen $0' = 1$ die Eins. Also $n' = (n + 0)' = n + 0' = n + 1$, wie üblich. Dann $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, \dots$. Darstellung in den Zahlssystemen eine der größten Kulturleistungen der Menschheit.*

Operationen d.h. immer zulässige Rechenoperation

Addition definiert durch $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n + 0 = n \wedge n + m' = (n + m)')$

Multiplikation definiert durch $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n \cdot 0 = 0 \wedge n \cdot m' = n \cdot m + n)$

Intuition $1=0'$

$n + m = n + 1 + 1 + \dots + 1$ (m Mal),

$n \cdot m = n + n + n + \dots + n$ (m Mal)

die Operationen tatsächlich **wohldefiniert**:

für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n^+ = \{m \in \mathbb{N} : n + m \text{ ist definiert}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Dann $0 \in D_n^+$, da $n + 0 = 0$ oben definiert. Ausserdem

$m \in D_n^+ \Rightarrow n + m$ definiert $\Rightarrow (n + m)'$ definiert

$\Rightarrow n + m' = (n + m)'$ definiert $\Rightarrow m' \in D_n^+$.

Also $0 \in D_n^+$ und $m \in D_m^+ \Rightarrow m' \in D_n^+$. Somit $D_n^+ = \mathbb{N}$ nach

InduktionsPrinzip, für beliebiges $n!$

d.h. $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m$ definiert.

Vollkommen analog Multiplikation immer definiert.

Die Rechenregeln in $\mathbb{N}$

Operationen

Addition definiert durch $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n + 0 = n \wedge n + m' = (n + m)')$

Multiplikation definiert durch $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n \cdot 0 = 0 \wedge n \cdot m' = n \cdot m + n)$

Man kann auch mit dem IP die üblichen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze herleiten.

Multiplikation in $\mathbb{N}$ kommutativ

Multiplikation: $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n \cdot 0 = 0 \wedge n \cdot m' = n \cdot m + n)$

Bsp. 1.1 *Das Kommutativgesetz der Multiplikation (schwer zu zeigen)*

Sei $n \in \mathbb{N}$, setzen $K_n = \{m \in \mathbb{N} : n \cdot m = m \cdot n\}$.

Müssen zeigen $K_n = \mathbb{N}$. Aber wieso $0 \in K_n$ bzw $0 \cdot n = 0$??

Hierfür zeigen wir $K_0 = \mathbb{N}$: da $0 \cdot 0 = 0$ ist $0 \in K_0$.

Wenn $n \in K_0$, dann $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$, also

$0 \cdot n' = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$ und $n' \in K_0$, d.h. $K_0 = \mathbb{N}$.

Somit $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \cdot n = 0 \wedge 0 \in K_n$.

Induktionsschritt noch schwerer: Sei

$m \in K_n$, dann $n \cdot m' = n \cdot m + n = m \cdot n + n$ nach Def " $\cdot$ " und da $m \in K_n$. Bleibt zu zeigen

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot n + n = m' \cdot n,$$

$$\text{d.h. } m \cdot n + n = (m + 1) \cdot n$$

dann $m' \in K_n$ und $K_n = \mathbb{N}$ folgt.

Multiplikation: $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n \cdot 0 = 0 \wedge n \cdot m' = n \cdot m + n)$
 Aber wie $\forall n, m \in \mathbb{N} : m \cdot n + n = m' \cdot n$ zeigen? Rollenwechsel,
 Induktion in n nun – da n 2.Faktor, dieser ist in der Definition
 der Multiplikation "rekursiv" (d.h. für Anwendung des IP)
 eingesetzt. Sei also $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fix und sei

$$H_m = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n + n = m' \cdot n\},$$

dann $0 \in H_m$, da $0 \cdot 0 + 0 = 0 = 1 \cdot 0$.

Wenn $n \in H_m$, dann

$$\begin{aligned} m \cdot n' + n' &= (m \cdot n + m) + (n + 1) \text{ nach Def der " \cdot " und 1} \\ &= (m \cdot n + n) + (m + 1) \text{ Regeln für " + " : DIY !} \\ &= m' \cdot n + m' \text{ da } n \in H_m \\ &= m' \cdot n' \text{ nach Def. der Multiplikation.} \end{aligned}$$

Also $0 \in H_m$ und $n \in H_m \Rightarrow n' \in H_m$ gezeigt, nach IP gilt
 $H_m = \mathbb{N}$.

q.e.d.

Ordnung ist das halbe Leben - auch in $\mathbb{N}$

Es ist leicht zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \exists m \in \mathbb{N} : m' = n$, sonst liefert $X = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ Widerspruch zu IP. Daraus folgt

- a) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$
- b) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m = 1 \Rightarrow \{n, m\} = \{0, 1\}$

z.B. in a) wenn $m \neq 0$, dann $\exists k \in \mathbb{N} : k' = m$, also
 $0 = n + k' = (n + k)'$

Widerspruch.

Definition 1.2 Seien n, m in $\mathbb{N}$, dann sagen wir $n < m$ wenn es ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt mit: $m = k + n$, und definieren $m - n = k$.

Bemerkung Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : (n < m) \vee (n = m) \vee (m < n),$$

und nur eine der Aussagen gilt. Für $m < n$ schreiben wir auch $n > m$. Das k in obiger Definition ist eindeutig!

Alle diese Aussagen folgen vermittels Induktionsprinzip (z.B. betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und die Menge aller m die die obige "Trichotomie" erfüllen.)

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Subtraktion in $\mathbb{N}$

wird definiert via $(m - n = l) :\Leftrightarrow (m = n + l)$,
falls $m \geq n$

Definition 1.3

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ wird definiert durch

- 1 $[z] \in \mathbb{Z} :\Leftrightarrow$ (es ex. $m, n \in \mathbb{N}$ so dass $[z]=[m-n]$)
- 2 $[m_1 - n_1] = [m_2 - n_2] :\Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1$.

Wir benutzen diese etwas unorthodoxe Schreibweise, da sie kurz und prägnant ist. Formal bedeutet $[m - n]$ die Äquivalenzklasse, die zum Paar (m, n) bezüglich der zur Subtraktion entsprechenden Äquivalenzrelation gehört, Standardnotation $[(m, n)]_-$.

Bsp. 1.2

$$[2 - 5] = [1 - 4] = [97 - 100] = [0 - 3] = [-3]$$

Zulässige Operationen auf der Menge $\mathbb{Z}$

Definition 1.4

Addition $[m_1 - n_1] + [m_2 - n_2] := [(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)],$

Multiplikation $[m_1 - n_1] * [m_2 - n_2] := [(m_1 m_2 + n_1 n_2) - (m_1 n_2 + m_2 n_1)]$

Vergleich $[m_1 - n_1] > [m_2 - n_2] :\Leftrightarrow m_1 + n_2 > m_2 + n_1$

Subtraktion $[m_1 - n_1] - [m_2 - n_2] := [(m_1 + n_2) - (n_1 + m_2)]$

Bemerkungen

- Schreibweise: $[0 - n] = -n, [m - 0] = m$
- $(-1) * (-1) = [0 - 1] * [0 - 1] = [(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) - (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)] = [1 - 0] = 1.$
- $n \in \mathbb{N} \mapsto [n - 0] \in \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $4 - (-2) = [4 - 0] - [0 - 2] = [(4 + 2) - (0 + 0)] = [6 - 0] = 6,$
 $3 + (-5) = [3 - 0] + [0 - 5] = [3 - 5] = [0 - 2] = (-2).$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : z_1 + (z_2 - z_1) = z_2,$ konsistent mit Rolle der Subtraktion als Umkehroperation zur Addition.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Division
in $\mathbb{Z}$ wird definiert via $(p:r = q) \Leftrightarrow (p = q * r)$,
falls r Teiler von p

Definition 1.5 Die **Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ wird definiert durch

- $[q] \in \mathbb{Q} : \Leftrightarrow$ es ex. $p \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so dass $[q] = [p:r]$
- $[p_1:r_1] = [p_2:r_2] : \Leftrightarrow p_1 r_2 = p_2 r_1$

Bsp. 1.3 $[12:30] = [6:15] = [2:5]$

Zulässige Operationen auf $\mathbb{Q}$

Definition 1.6

Addition $[p_1 : r_1] + [p_2 : r_2] := [(p_1 r_2 + p_2 r_1) : r_1 r_2],$

Subtraktion $[p_1 : r_1] - [p_2 : r_2] := [(p_1 r_2 - p_2 r_1) : r_1 r_2],$

Multiplikation $[p_1 : r_1] * [p_2 : r_2] := [p_1 p_2 : r_1 r_2] ,$

Vergleich $[p_1 : r_1] > [p_2 : r_2] :\Leftrightarrow (p_1 r_2 - p_2 r_1) r_1 r_2 > 0$

Division $[p_1 : r_1] / [p_2 : r_2] := [p_1 r_2 : r_1 p_2], \text{ falls } p_2 \neq 0.$

Bemerkungen

- Schreibweise $[p : r] = \frac{p}{r}$
- $z \in \mathbb{Z} \mapsto \frac{z}{1} \in \mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Absolutbetrag und Abstand in $\mathbb{Q}$

Definition 1.7
(Betrag) Für $q \in \mathbb{Q}$ ist der **Betrag von q** definiert durch

$$|q| = \begin{cases} q & \text{falls } q \geq 0 \\ -q & \text{falls } q < 0. \end{cases}$$

Bemerkung $|p| = |-p|$ und $|p - q| \leq |p| + |q|$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$

Definition 1.8
(Abstand) Für $p, q \in \mathbb{Q}$ ist der **Abstand von p und q** definiert durch

$$d(p, q) = |p - q|$$

Bemerkung
(Dreiecksungleichung) $|p - q| \leq |p - r| + |r - q|$ für alle $p, q, r \in \mathbb{Q}$

'Unvollständigkeit' der rationalen Zahlen

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (z.B. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele π (Flächeninhalt des Kreise mit Radius 1)
 $\sqrt{2}$ (Länge der Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)

Satz 1.1 *Es gibt keine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.*

Bew: *(Widerspruchsbeweis:) Falls $q = \frac{p}{r}$, so können wir den Bruch so weit kürzen, dass p und r teilerfremd sind.*

Wegen $2 = \frac{p^2}{r^2}$ ist $p^2 = 2r^2$, somit ist p^2 eine gerade Zahl.

Also muss p selbst gerade sein, denn sonst wäre p^2 ungerade.

Also ist $p = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$.

Oben eingesetzt ergibt sich $2r^2 = (2k)^2 = 4k^2$,

und somit $r^2 = 2k^2$, d.h. r^2 ist ebenfalls gerade,

somit auch r selbst, d.h. $r = 2l$ mit einem $l \in \mathbb{N}$.

Insgesamt erhalten wir, dass $\frac{p}{q} = \frac{2l}{2k}$,

was nicht teilerfremd ist, also Widerspruch.

q.e.d.