Vorlesung Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, WS 16/17

Prof. Dr. Bernd Kirchheim
Mathematisches Institut
kirchheim@math.uni-leipzig.de

Kapitel 1:

Grundlagen

Kap.1 : Grundlagen

Inhalt

- Aussagenlogik
- Naive Mengelehre
- Zahlen (wie die Alten Griechen sie kannten)
- Die reellen Zahlen

1.1 Aussagenlogik

1.2 Naive Mengenlehre

Naive Mengenlehre

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können. David Hilbert 1926.

Definition 1.1 *'Eine* **Menge** *ist die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.' (G. Cantor, 1845-1918)*

Schreibweisen

$a \in A$ 'a ist ein Element der Menge A'
$a \notin A$ 'a ist nicht ein Element der Menge A '

Beschreibung von Mengen

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ (Aufzählung)
$A = \{a \mid a \text{ hat Eigenschaft } \alpha\}$ (Eigenschaft)

Bsp. 1.1

- $M =$ *Teilnehmer des Tutoriums* $= \{$*Anna, Hans, ...* $\}$
- $G = \{z \mid$ *z ist ein Vielfaches der Zahl* $7\}$
- $X = \{x \mid x = x\}$ *(All-Menge)*
- $\emptyset := \{x \in X \mid x \neq x\}$ *(Leere Menge)*

Mengenalgebra - Grundoperationen

Definition 1.2

Teilmenge $A \subset B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Gleichheit $A = B :\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

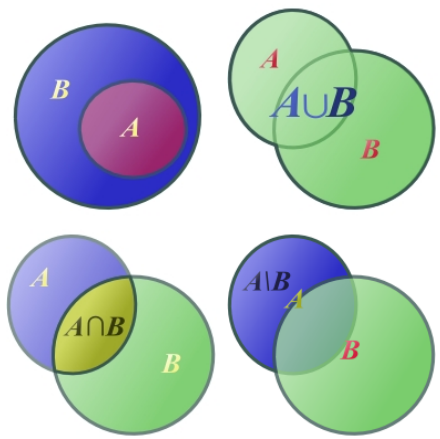
Vereinigung $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Durchschnitt $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Differenz $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
auch Komplement von B in A genannt

Komplement $A^c = X \setminus A$ wenn das "Universum" X (mit $A \subset X$) klar

Potenzmenge $\mathcal{P}(A) := \{M | M \subset A\}$
$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$P(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},$
$\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\ \}$



Rechnen mit Mengen - Beispiele

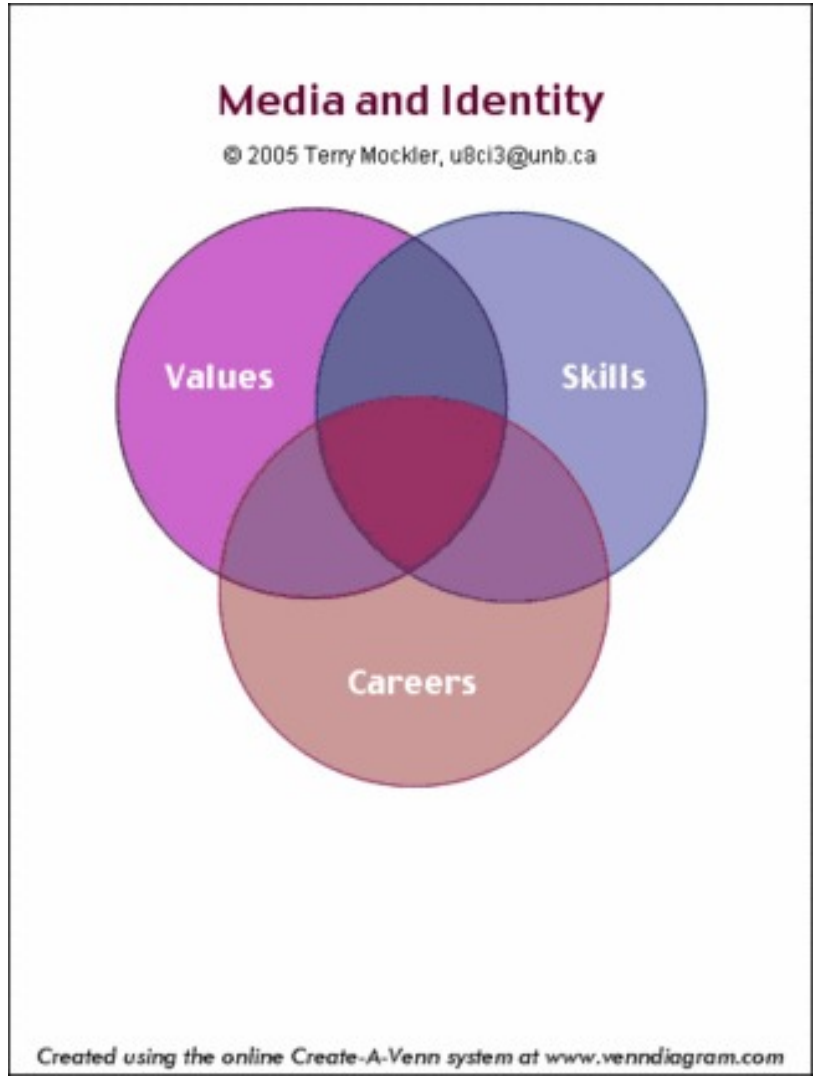
$\emptyset \subset A$ für jede Menge A

1. Distributivgesetz $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. De Morgan'sche Regel $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Beweis:
$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$.
Beweis 1. Distributivgesetz:
$(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)$*Leftrightarrow*$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ mit Wahrheitstabelle
oder mit Inklusionen:
sei $x \in A \cap (B \cup C)$ aber nicht in $A \cap B$. Da $x \in A \cap (B \cup C)$ ist $x \in A$, weil $x \notin A \cap B$ muss $x \notin B$ gelten
Da $x \in A \cap (B \cup C)$ ist $x \in B \cup C$, weil $x \notin B$ folgt $x \in C$. Also $x \in A \cap C$.
Somit $x \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Umgekehrt: $B \subset B \cup C$, also $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$.
Analog zeigt man $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$.
Zusammen ergibt das $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.
Beweis de Morgan:
$(x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$ Distributivgesetz

Mengenlehre und HR Management ...



Cartesisches Produkt und Relationen

Definition 1.3 *Das* **Cartesische Produkt** *zweier Mengen A und B ist die Menge*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

wobei $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ *geordnet !*

Bsp. 1.2 *Studenten* $\times$ *Dozenten* $=:$ *Uni*

Definition 1.4 *Eine* **Relation von** A **auf** B *ist eine Teilmenge* $R \subset A \times B$.

Bsp. 1.3 $R = \{(S, D) \in \mathit{Uni} \mid S \text{ hört Vorlesung bei } D\}$

Definition 1.5 *Eine Relation* $R \subset A \times A$ *heißt*

- **symmetrisch**, *falls* $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$,
- **transitiv**, *falls* $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- **reflexiv**, *falls* $(a, a) \in R$ *für alle* $a \in A$.

Bsp. 1.4
$R = \{(s, s') \in \mathit{Studenten} \times \mathit{Studenten} \mid s \text{ ist verliebt in } s'\}$
$R = \{(s, s') \in S \times S \mid s \text{ kommt aus demselben Dorf wie } s'\}$
$R = \{(s, s') \in S \times S \mid s \text{ hat (echt) größere Füße als } s'\}$

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Definition 1.6 *Eine symmetrische, transitive und reflexive Relation auf einer Menge A heißt* **Äquivalenzrelation**. *Schreiben oft $a \sim b$ statt $(a, b) \in R$.*

Bsp. 1.5 $R = \{(s, s') \in S \times S \mid s \text{ kommt aus demselben Dorf wie } s'\}$

Definition 1.7 *Eine* **Klasseneinteilung** *einer Menge A ist eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen, d.h. $\mathcal{Z} = \{A_i, i \in I\}$, $A_i \subset A$, so dass*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ wobei } A_i = A_j \text{ falls } A_i \cap A_j \neq \emptyset.$$

Bsp. 1.6 $S = \bigcup S_i$, $S_i =$ *Studenten mit Schuhgröße i.*

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Satz 1.1 *Für eine Äquivalenzrelation R auf A bilden die Mengen $A_i = \{a \in A \mid (a,i) \in R\}$, $i \in A$ eine Klasseneinteilung.*

Bew: *1) $i \in A_i$ (Refl.) $\Rightarrow \bigcup_{i \in A} A_i = A$.*
2) Falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$,
dann ex. $a \in A$: $(a,i) \in R$ und $(a,j) \in R$
$\Rightarrow (j,a) \in R$ (Symm.)
$\Rightarrow (j,i) \in R$ (Trans.)
$\Rightarrow A_j \subset A_i$, denn falls $(a',j) \in R \Rightarrow (a',i) \in R$ (Trans.)
Analog folgt $A_i \subset A_j$,
d.h. $A_i = A_j$, falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
Bemerkung: $A_i = A_j \Leftrightarrow i \sim j$, viele A_i's wiederholt

Definition 1.8 *A_i ist eine* **Äquivalenzklasse**,
i ist ein **Repräsentant** *der Klasse A_i.*

Bsp. 1.7 *Hans (mit Schuhgröße 42) ist ein Repräsentant der Klasse aller Studierenden mit Schuhgröße 42.*

Nachtrag – Prädikate und Quantoren

Definition 1.9 *Ein* **Prädikat** *auf einer Menge A ist eine Aussageform mit den Mengenelementen als Variablen.*

Bsp. 1.8 *$S \hat{=}$ Menge der Studenten, $P(s) :\Leftrightarrow$ s kommt aus Sachsen.*

Definition 1.10 (Quantoren) *Der* **All-Quantor**, *bzw.* **Existenz-Quantor** *für ein Prädikat P auf einer Menge S definiert eine Aussage gemäß*

$$\underset{s\in S}{\forall} P(s) :\Leftrightarrow \big(P(s_1) \wedge P(s_2) \wedge P(s_3) \dots\big)$$

$$\underset{s\in S}{\exists} P(s) :\Leftrightarrow \big(P(s_1) \vee P(s_2) \vee P(s_3) \dots\big).$$

Bsp.: Alle Studenten kommen aus Sachsen: $\underset{s\in S}{\forall} P(s)$

Bsp.: Es existiert mindestens ein Student aus Sachsen: $\underset{s\in S}{\exists} P(s)$

Negation der Quantoren!
erfordert Sorgfalt

$$\neg(\underset{s\in S}{\forall} P(s)) \Leftrightarrow \underset{s\in S}{\exists} \neg P(s), \neg(\underset{s\in S}{\exists} P(s)) \Leftrightarrow \underset{s\in S}{\forall} \neg P(s)$$

ist aber logisch so ;-)