Vorlesung Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, WS 16/17

Prof. Dr. Bernd Kirchheim
Mathematisches Institut
kirchheim@math.uni-leipzig.de

Dies ist der Foliensatz zur Vorlesung

Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

aus dem WS 2016/2017 an der Universität Leipzig.

Inhalt sind gemäß Modulbeschreibung die typischen Grundlagen Logik, Mengenlehre und Folgengrenzwerte sowie im Anschluss Differential- und Integralrechnung in einer Variablen.

Der Foliensatz enstand in **sehr enger** Anlehnung an die gleichnamige Vorlesung im WS 2015/16, gehalten von Prof. Dr. Max v. Renesse. Jegliche Fehler gehen jedoch auf mich zurück. Über eventuelle diesbezügliche Hinweise oder Nachfragen würde ich mich **freuen**.

Zur Gewöhnung an die mathematische Methodik und zur Wiederholung der Elementarmathematik werden die logischen Grundlagen der Mathematik sowie die Konstruktion der Zahlbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ausführlich(er) besprochen.

In den späteren Abschnitten werden Aussagen meist nur skizzenartig begründet bzw. durch Beispiele veranschaulicht.

Kapitel 1:

Grundlagen

Kap.1 : Grundlagen

Inhalt

- Aussagenlogik
- Naive Mengelehre
- Zahlen (wie die Alten Griechen sie kannten)
- Die reellen Zahlen

1.1 Aussagenlogik

Elementare Aussagenlogik

Elementare Aussagenlogik - die Sprache der Mathematik

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders. Johann Wolfgang von Goethe, Leipzig 1765-1768

Wozu brauchen wir diese exakte Sprache?
Ein Wirt vermietet an 3 Gäste 3 Zimmer zu je 10 Euro. Dann entscheidet er, zu Werbezwecken 5 Euro an die Gäste zurückzugeben. Der Page wird losgeschickt, da er nicht soviel Kleingeld hat, behält er 2 E und gibt jedem Gast einen zurück.

Nun wundert er sich: die Gäste zahlten 3x9=27E. Ich habe zwei behalten, sind 29E. Der Wirt erhielt aber 30E, wo ist der fehlende Euro?

Elementare Aussagenlogik - die Sprache der Mathematik

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders. Johann Wolfgang von Goethe, Leipzig 1765-1768

Definition 1.1 *Eine* **Aussage** *ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist. (Aristoteles)*

Bsp. 1.1

- *A: Dresden ist eine Stadt.*
- *B: Leipzig ist ein Dorf.*
- *C: Leipzig ist größer als Dresden.*
- *D: Leipzig ist eine Stadt.*
- *E: Nachts ist es kälter als draußen. (?)*

Verknüpfungen von Aussagen

Durch Verknüpfung können neue Aussagen gebildet werden.

Elementarverknüpfungen

Negation	'NICHT': $\neg A$.
	Dresden ist nicht eine Stadt. (Dresden ist keine Stadt.)
Disjkunktion	'ODER': $A \vee B$.
	Dresden ist eine Stadt oder Leipzig ist ein Dorf.
Konjunktion	'UND': $A \wedge B$
	Dresden ist eine Stadt und Leipzig ist ein Dorf.

Formale Definition: *Wahrheitstabelle*

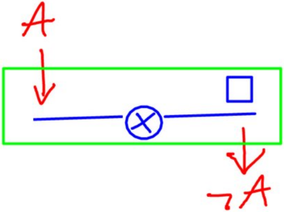
Definition 1.2 *Für zwei Aussagen U und V definiert man neue Aussagen $\neg U$, $U \vee V$ und $U \wedge V$ wie folgt.*

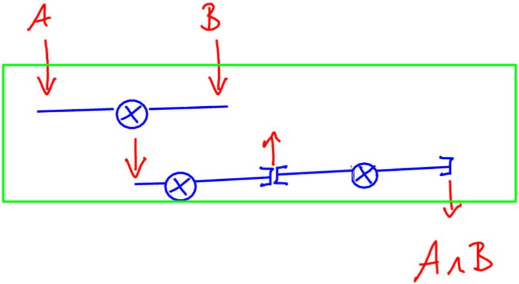
U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$\neg$ U	F	F	W	W
U $\vee$ V	W	W	W	F
U $\wedge$ V	W	F	F	F

$\vee$ ist also das inklusive "oder"

$\vee$,$\wedge$ symmetrisch in den Variablen

Beispiel: Logik in der Mechanik
NEG- und UND-Maschine





Äquivalenzverknüpfung

Definition 1.3 ('$\Leftrightarrow$') *Für zwei Aussagen U und V definiert man*

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$U \Leftrightarrow V$	W	F	F	W

Sprechweise *U ist* **notwendig und hinreichend** *für V bzw.*
U ist **äquivalent** *zu V bzw. U* **g***enau* **d***ann* **w***enn V.*

Bsp. 1.2 *Folgende 3 Aussagen sind jeweils paarweise äquivalent (für beliebiges A, B)*

- *($A \Leftrightarrow \neg B$) hat Wahrheitswert W*
- *($\neg A \Leftrightarrow B$) Wahrheitswert W*
- *($A \Leftrightarrow B$) hat Wahrheitswert F*

Implikationsverknüpfung

Definition 1.4 ('$\Rightarrow$') *Für zwei Aussagen U und V definiert man*

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$U \Rightarrow V$	W	F	W	W

Sprechweisen *U ist* **hinreichend** *für V bzw. U* **impliziert** *V.*

Bsp. 1.3 *Wir wissen, dass Folgendes gilt*

- A $\Rightarrow \neg$ B. (Wahrheitswert: W)
- A $\Rightarrow$ B. (Wahrheitswert: F)
- B $\Rightarrow$ A. (Wahrheitswert: W)

Wahrheitswerte für A,B finden! Lösung A=W, B=F.
ist einzig mögliche — auch konsistent!

Aussageformen und Tautologien

Aus **Aussagevariablen** enststehen durch Verknüpfung und Klammerbildung **Aussageformen** z.B.

$$\neg((U \wedge V) \Rightarrow \neg W).$$

Definition 1.5 *Aussageformen mit Wahrheitswert W (für beliebige Wahrheitswerte der Variablen) heißen* **Tautologien**.

Bsp. 1.4

1. $A \Rightarrow A$
2. $A \vee \neg A$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
4. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *Begründung des indirekten Beweises.*
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
6. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Bemerkung 5. & 6. heißen die **de Morgan'schen Regeln**.

4. bedeutet: (A hinreichend für B) gdw (B notwendig für A)

Nachweis: Wahrheitstabelle

Beispiel 1.4.1

A	W	F
A $\Rightarrow$ A	W	W

Beispiel 1.4.2

A	W	F
$\neg A$	F	W
$A \vee \neg A$	W	W

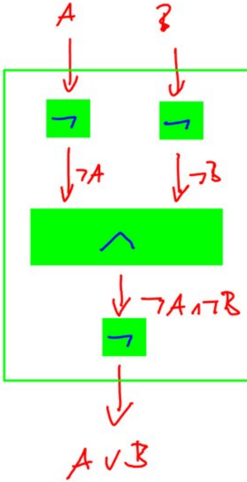
Beispiel 1.4.3

A B	W W	W F	F W	F F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A \vee B$	W	F	W	W
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	W	W	W	W

Beispiel 1.4.4 nun intelligenter für $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
nach 1.4.3 wissen wir $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
klar ist $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee \neg A) \Leftrightarrow (\neg(\neg B) \vee \neg A)$
Also nochmal 1.4.3 auf andere Variablen angewenden:
$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (\neg(\neg B) \vee \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ q.e.d.

Beispiel: de Morgan in der Mechanik. Eine ODER-Maschine

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$



Logisches Schliessen

Bsp. 1.5 *Dresden ist eine Stadt und Leipzig größer als Dresden. Also ist Leipzig kein Dorf.*

Struktur

- Prämisse 1: A
- Prämisse 2: C
- Prämisse 3: $\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{D}$
- Prämisse 4: $\mathrm{D} \Rightarrow \neg B$
- Konklusion: $\neg B$.

A:	Dresden ist eine Stadt
B:	Leipzig ist ein Dorf
C:	Leipzig ist größer als Dresden
D:	Leipzig ist eine Stadt

Benutzt Tautologie $\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} \wedge (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{D}) \wedge (\mathrm{D} \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B$

Gültiges Schließen

Gegeben *Prämissen* $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$
(Aussageformen)

Folgerung *Konklusion* (C)
(Aussageform)

Schreibweise

$$(P_1), (P_2), \ldots, (P_n) \models (C)$$

Definition 1.6 *Ein Schluss heißt* **gültig**, *falls*

$$(P_1) \wedge (P_2) \wedge \cdots \wedge (P_n) \Rightarrow (C) \quad \textit{Tautologie}$$

Übung (Theodizee). Wenn es Supermann gibt und er ein guter Held ist, verhindert er alles Übel. Da es Übel in dieser Welt gibt, gibt es Supermann nicht, oder er ist kein guter Held.