

Vorlesung Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, WS 16/17

Prof. Dr. Bernd Kirchheim
Mathematisches Institut
`kirchheim@math.uni-leipzig.de`

Kapitel 1:

Grundlagen

Kap.1 : Grundlagen

Inhalt

- Aussagenlogik
- Naive Mengenlehre
- Zahlen (wie die Alten Griechen sie kannten)
- Die reellen Zahlen

1.4 Die reellen Zahlen

Wiederholung $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Wir hatten letztesmal die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ aus ihrem Anfang 0, dem Begriff des Nachfolgers ($n \rightarrow n'$) und dem Induktionsprinzip **IP**

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (0 \in X \wedge (\forall n \in X : n' \in X)) \Rightarrow X = \mathbb{N},$$

d.h. gemäß der Peano-Axiome gebaut.

Es lassen sich "+" und " $\cdot$ " dann definieren und Standard Rechenregeln herleiten, d.h. Kommutativ- und Assoziativgesetze und das Distributivgesetz. Ausserdem existieren für beide Operationen "neutrale Elemente" 0 bzw 1:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 + n = n + 0 = n \quad 1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

Inverse Operationen "-" und "/" nur teilweise möglich:

$$n - m = k \text{ wenn } n = m + k, k \text{ existiert} \Leftrightarrow n \geq m$$

$$n/m = k \text{ wenn } n = m \cdot k \text{ und } k \text{ eindeutig} \Leftrightarrow (m|n \wedge n \neq 0),$$

wobei $m|n$ bedeutet m teilt n .

Um immer die inverse Operation zu haben, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ einführen, d.h. mit allen formalen Differenzen ($[m_1 - m_2]$) und allen formalen Quotienten ($[m : n]$) rechnen.

Induktion

Das Induktionsprinzip **IP**

$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (0 \in X \wedge (\forall n \in X : n' \in X)) \Rightarrow X = \mathbb{N}$, für Menge ist äquivalent zum Induktionsbeweis.

Sei P Prämisse auf $\mathbb{N}$ so dass

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_+ : P(n-1) \Rightarrow P(n)). \text{ Dann } \forall n \in \mathbb{N} : P(n).$$

Beweis: Betrachte $X = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$, nach IP folgt aus
Voraussetzung $X = \mathbb{N}$.

Aus IP folgt auch Wohlordnungssatz (siehe Präsenzaufgabe 2.4)

$$\forall X \subset \mathbb{N} : ((X \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists k (= \min X) \in X : \forall n \in X : k \leq n)),$$

jede nicht leere Menge in $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element. Dies gibt

Starkes IP: Sei P Prämisse auf $\mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall m \in \mathbb{N} : m < n \Rightarrow P(m)) \Rightarrow P(n).$$

Dann $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$. Erleichtert i.A. den Beweis, da wir Annahme für alle "Vorgänger" machen können.

Idee: wenn es kein kleinstes Gegenbeispiel gibt, gibt es überhaupt keins. Nützlich zB für Primzahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (dh. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele $\sqrt{2}$ (Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)

π (Flächeninhalt des Kreises mit Radius 1)

bekannt seit der Antike
gute Näherung und Beweis der Irrationalität schwer

e -Eulersche Zahl, Basis des natürlichen Logarithmus

bekannt seit 17. bzw 18. Jhd (John Napier, Leonard Euler)
gute Näherung und Beweis der Irrationalität leicht

Idee Irrationale Zahlen durch rationale Zahlen annähern und verstehen — **approximieren**

Definition 1.1 *Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist eindeutig als 'größte untere Schranke' einer geeigneten Teilmenge $M \subset \mathbb{Q}$ definiert. (Idee v. Dedekind) leicht vorzustellen, schwerer exakt zu zeigen*
(Intuitiv)

Bemerkung $\mathbb{R} \simeq$ 'Zahlengerade'

Approximation durch Intervallschachtelung

Bsp. 1.1

$$s = \sqrt[3]{2} = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^3 < 2 \Rightarrow 1 < s \\ 2^3 = 8 > 2 \Rightarrow s < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow s \in]1, 2[=:]a_1, b_1[.$$

2. Schritt $m_1 = \frac{b_1+a_1}{2} = \frac{3}{2}$ (Intervallmittelpunkt)

$$m_1^3 = \frac{27}{8} > 2 \Rightarrow s < m_1 \Rightarrow s \in]a_1, m_1[=:]a_2, b_2[$$

3. Schritt $m_2 = \frac{b_2+a_2}{2} = \frac{5}{4}$ (Intervallmittelpunkt)

$$m_2^3 = \frac{125}{64} < 2 \Rightarrow s > m_2 \Rightarrow s \in]m_2, b_2[=:]a_3, b_3[$$

4. Schritt $m_3 = \frac{b_3+a_3}{2} = \frac{11}{8}$ (Intervallmittelpunkt)

$$m_3^3 = \frac{1331}{512} > 2 \Rightarrow s < m_3 \Rightarrow s \in]a_3, m_3[=:]a_4, b_4[$$

↪ nach 4
Schritten:

$$\sqrt[3]{2} = s \in]\frac{5}{4}, \frac{11}{8}[=]1.25, 1.375[\quad (s \simeq 1,26).$$

Fundamentalfolgen (in $\mathbb{Q}$)

Definition 1.2 (Folge) Sei $A \neq \emptyset$, dann heißt $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in A \times A \times A \dots$ eine **Folge** in A bzw. A -Folge. D.h.: $\forall n : a_n \in A$.

Definition 1.3 (Fundamentalfolge) Eine Fundamentalfolge in $\mathbb{Q}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Folge, so dass $\forall K \in \mathbb{N}_+$

$$|q_n - q_m| \leq \frac{1}{K} \text{ für schließlich alle } n \text{ und } m, \quad (1)$$

d.h. es ex. $N_K \in \mathbb{N}$, s.d. $|q_n - q_m| \leq \frac{1}{K}$ für alle $n, m \geq N_K$.

Bsp. 1.2 $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ vs. $b_n = (-1)^n$.

Bsp. 1.3 Dezimalbruchentwicklung $\sqrt[3]{2} = 1,25992104989 \dots$

Bemerkung "Für schließlich alle" $\Leftrightarrow$ "Für alle bis auf endlich viele"
 $\neg$ ("für schließlich alle" $n : P(n)$) $\Leftrightarrow \forall N \exists n \geq N : \neg P(n)$

Bemerkung Es reicht/wir werden nur verlangen, dass in einer Fundamentalfolge q_n für schließlich alle n definiert ist. Endliche viele Anfangsterme entscheiden nicht, ob (??) gilt. $\Rightarrow$ schreiben $(q_n)_n$

Äquivalenz von Fundamentalfolgen

Definition 1.4 Zwei Fundamentalfolgen $(q_n)_n$ und $(r_n)_n$ heißen **äquivalent**, falls zu jedem $K \in \mathbb{N}_+$

$$|q_n - r_n| \leq \frac{1}{K} \text{ für schließlich alle } n,$$

d.h. es ex. $N_K \in \mathbb{N}$, s.d. $|q_n - r_n| \leq \frac{1}{K}$ für alle $n \geq N_K$.

Bemerkung Statt $\forall K \in \mathbb{N}, < \frac{1}{K}$ und N_K kann man
 $\forall \varepsilon > 0 (\wedge \varepsilon \in \mathbb{Q}), < \varepsilon$ und N_ε nutzen.

Bsp. 1.4 $(q_n := 2 + \frac{1}{n})$ und $(r_n := 2 + \frac{(-1)^n}{n^3})$ sind äquivalent.

Bemerkung Auf der Menge der Fundamentalfolgen
 $\mathcal{F} := \{(a_n) \mid (a_n) \text{ ist Fundamentalfolge}\}$
definiert dies eine Äquivalenzrelation
 $\mathcal{R} := \{((q_n), (r_n)) \mid (q_n) \text{ und } (r_n) \text{ äquivalent}\} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}.$

Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Definition 1.5 (Die Menge $\mathbb{R}$)

Die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ wird definiert durch
$$\mathbb{R} := \{\text{Alle (Äquivalenzklassen von) } \mathbb{Q}\text{-Fundamentalfolgen}\}.$$

Bsp. 1.5 $r = [(m_n)_n] \in \mathbb{R}$ (Mittelpunkt-Folge v. Intervallschachtelung).

Bemerkung

- Jede $\mathbb{Q}$ -Fundamentalfolge $(p_n)_n$ **repräsentiert** eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R} = [(p_n)_n]$.
- Zwei Fundamentalfolgen repräsentieren dieselbe reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn sie äquivalent sind, d.h.

$$[(p_n)_n] = r = [(q_n)_n] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (p_n)_n \text{ äquiv. } (q_n)_n.$$

Bemerkung

Die rationalen Zahlen sind in $\mathbb{R}$ repräsentiert durch die konstanten $\mathbb{Q}$ -Folgen, d.h.

$$[q] = [(q, q, q, \dots)] \in \mathbb{R} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Somit gilt insbesondere $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Rechnen mit (Fundamental-)Folgen

Definition 1.6 Für zwei Fundamentalfolgen $(p_n)_n$ und $(q_n)_n$

$$(p \oplus q)_n := (p_n + q_n)_n$$

$$(p \ominus q)_n := (p_n - q_n)_n$$

$$(p \odot q)_n := (p_n \cdot q_n)_n$$

wenn rechte Seite definiert, d.h. "fsa" (für schließlich alle) n und falls $q_n \neq 0$ fsa n , dann

$$(p \oslash q)_n := (p_n / q_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Satz 1.1 Für zwei $\mathbb{Q}$ -Fundamentalfolgen $(p_n)_n$ und $(r_n)_n$ sind $(p \oplus q)_n$, $(p \ominus q)_n$ und $(p \odot q)_n$ wieder $\mathbb{Q}$ -Fundamentalfolgen. Falls zudem $(q)_n$ nicht äquivalent zur Nullfolge $(0)_n$, so ist auch $(p \oslash q)_n$ eine $\mathbb{Q}$ -Fundamentalfolge.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$, dann $\varepsilon/2 > 0$ (und in $\mathbb{Q}$), also
 $| (p_n + q_n) - (p_m + q_m) | = | (p_n - p_m) + (q_n - q_m) |$
 $\leq |p_n - p_m| + |q_n - q_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für schließlich alle $n, m \in \mathbb{N}$.
Andere Operationen schwerer, kommt später nochmal.

Elementar-Operationen auf $\mathbb{R}$

Definition 1.7 $0 := [(0)_{n \in \mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$.

Definition 1.8 Für $r = [(r_n)_n] \in \mathbb{R}$ und $s = [(s_n)_n]$ definiere

$$r + s := [(r \oplus s)_n],$$

und analog für die Operationen $-$, $\cdot$ sowie (falls $s \neq 0$) für $\div$.

Definition 1.9 Für $r, s \in \mathbb{R}$

- $r = [(r_n)_{n \in \mathbb{N}}] > 0$
 $:\Leftrightarrow (\text{Es ex. } K \in \mathbb{N} \text{ mit } r_n > \frac{1}{K} \text{ für schließlich alle } n).$
- $r > s :\Leftrightarrow r - s > 0$,
bzw. $r \geq s :\Leftrightarrow ((r > s) \vee (r = s))$. *Trichotomie*
 $\forall s, r \in \mathbb{R} : (s < r) \vee (s = r) \vee (r < s)$ nichttrivial!
- $|r| := \begin{cases} r & \text{falls } r \geq 0 \\ -r & \text{falls } r < 0. \end{cases}$
- $d(r, s) := |r - s|$.

Satz 1.2 $\mathbb{R}$ bildet mit den Operationen $+$ und $\cdot$ einen **Körper** d.h. es gilt

1 (Assoziativgesetz für $+$)

$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3) \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

2 (Kommutativgesetz für $+$)

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

3 (Neutrales Element für $+$): Für alle $r \in \mathbb{R}$

$$r + 0 = r \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

4 (Inverses Element für $+$): Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ex. ein $r' \in \mathbb{R}$ mit

$$r + r' = 0$$

5 (Assoziativgesetz für $\cdot$)

$$(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

6 (Kommutativgesetz für $\cdot$)

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

7 (Neutrales Element für $\cdot$): Mit $1 := [(1)_{n \in \mathbb{N}}]$ gilt für alle $r \in \mathbb{R}$

$$r \cdot 1 = r$$

8 (Inverses Element für $\cdot$): Zu jedem $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ex. ein $\tilde{r} \in \mathbb{R}$

$$r \cdot \tilde{r} = 1$$

9 Distributivgesetz

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}.$$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Definition 1.10

- 1 Eine Menge der Form

$$\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq a \wedge r \leq b\} =: [a, b] \subset \mathbb{R}$$

mit $a, b, \in \mathbb{R}$ heißt ein reelles abgeschlossenes **Intervall**.

- 2 Eine Folge von reellen abg. Intervallen $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **reelle Intervallschachtelung**, falls

- i) Die Folge $|b_n - a_n|_{n \in \mathbb{N}}$ ist schließlich kleiner jedem $\epsilon > 0$.
- ii) für alle $n \in \mathbb{N}$: $(a_{n+1} \geq a_n) \wedge (b_{n+1} \leq b_n)$.

Satz 1.3
(Vollständigkeit
von $\mathbb{R}$)

Eine reelle Intervallschachtelung hat genau einen **inneren Punkt**, d.h. es ex. genau ein $r \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{r\}$$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ – Beweis*

Lemma 1.1 *Es sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{Q}$ -Folge und $C \in \mathbb{Q}$, so dass stets $q_{n+1} \geq q_n$ sowie $q_n \leq C$ gilt. Dann ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge.*

Lemma 1.2 *Sei $r \in \mathbb{R}$ und $M > 0$. Dann ex. $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q > r$ und $q' < r$ und $d(q, r) \leq \frac{1}{M}$ bzw. $d(q', r) \leq \frac{1}{M}$.*

Bew: (Satz ??) *Existenz: Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schließlich konstant, d.h. $a_n = a$ für schliesslich alle n , so ist a offenbar im Durchschnitt aller Intervalle enthalten. – Andernfalls wähle man aus der Folge $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ unendlich viele Folgeglieder von Intervallen, so dass stets $a_{n+1} > a_n$ gilt. Die Durchschnittsmenge dieser ausgewählten Intervalle ist identisch zur ursprünglichen Durchschnittsmenge. Somit kann man nun davon ausgehen, dass stets $a_{n+1} - a_n > 0$ gilt. Mit dem obigen Lemma findet man $\alpha_n \in \mathbb{Q}$, s.d. stets $a_n \leq \alpha_n \leq a_{n+1}$. Aus dem vorigen Lemma folgt, dass $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{Q}$ -Fundamentalfolge ist. Zudem gilt dann für $a := [(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}]$, dass stets $a_n \leq a$ und $a \leq b_n$, also $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.*

Eindeutigkeit: (Übung)

q.e.d.