

Mathematik für Wirtschaftswissenschaften I
Universität Leipzig
Präsenzaufgaben 2

1. Aufgabe

Seien Mengen A, B, C und D gegeben. Zeigen Sie die Gleichungen

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (1)$$

$$(A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D) = (A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D). \quad (2)$$

2. Aufgabe

Welche der nachstehen Relationen ist eine Äquivalenz (also reflexiv, symmetrisch und transitiv), welche eine (nicht strikte) Ordnung (transitiv und $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b$), welche keines von beiden. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Zahl der Äquivalenzklassen.

- i) $(a, b) \in R_1$ wenn $(a, b) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ und a teilt b .
- ii) $(a, b) \in R_2$ wenn $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und a teilt b , d.h. $\exists c \in \mathbb{N} : b = a \cdot c$.
- iii) $(a, b) \in R_3$ wenn $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und a teilt b .
- iv) $(a, b) \in R_4$ wenn $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den gleichen Rest bei Division durch 2016 lassen.

3. Aufgabe

Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzen E_j in der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $(x, y) \in E_1$ wenn $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ und $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$,
- $(x, y) \in E_2$ wenn $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ und $x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2$,
- $(x, y) \in E_3$ wenn $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ und $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.

4. Aufgabe

- a) Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element hat, d.h. $\exists m \in M \forall n \in M : n = m \vee n > m$. [Hinweis: Betrachten Sie die "gute" Menge

$$G = \{n \in \mathbb{N} : (M \subset \mathbb{N} \wedge n \in M) \Rightarrow M \text{ hat kleinstes Element}\}.$$

- b) Zeigen Sie nun, dass jedes natürliche $n > 1$ ein Produkt von Primzahlen ist (d.h. von Zahlen die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind).
- c) Zeigen Sie, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ gerade oder ungerade ist.
[Hinweis: in b), c) betrachten Sie immer das kleinste Gegenbeispiel. Die Ungleichung $k \cdot l > l$ wenn $k > 1$ und $l > 0$ kann vorausgesetzt werden.]