Bew: Satz 6 $\quad \mu$ äußeres Maß auf (X,ϱ) metrisch

• "$\Leftarrow$" (Bem.) $A, B \subset X$ & $\operatorname{dist}(A,B) = d > 0$. Da

(*) $\forall M \subset X \quad x \to \operatorname{dist}(x,M)$ 1-Lips. ist $V = \{x, \operatorname{dist}(x,B) < \frac{d}{2}\}$

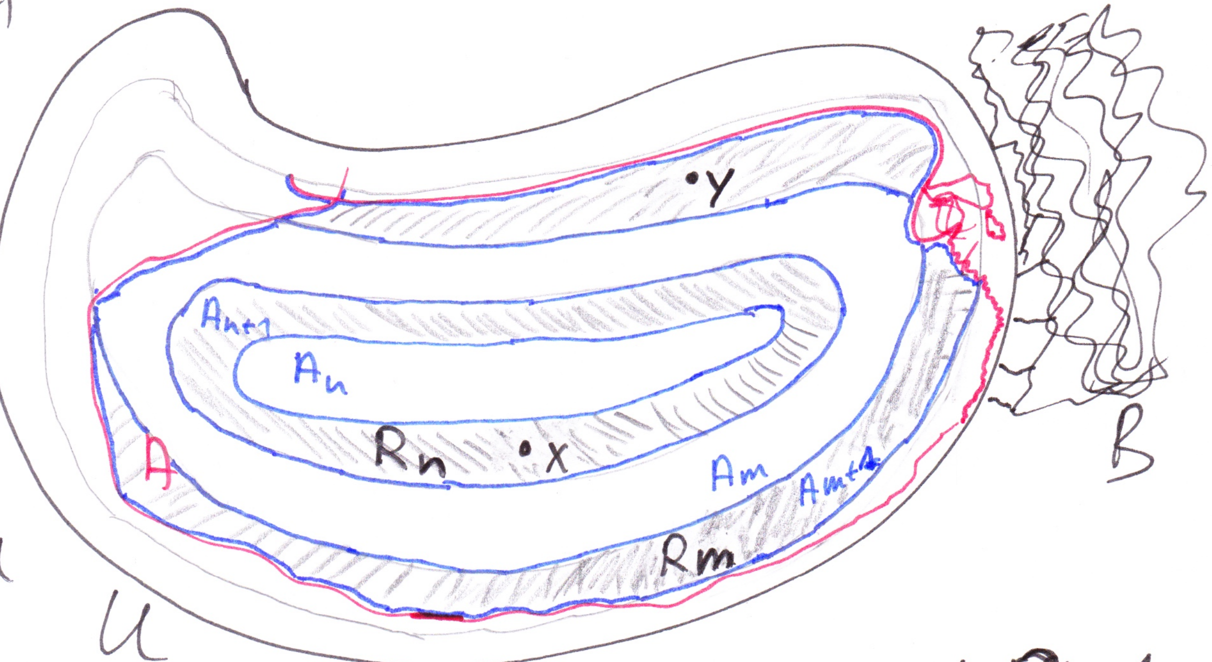
offen & $B \subset V$, $A \subset X \setminus V$. Also

$$\mu(A \cup B) = \mu((A\cup B) \cap V) + \mu((A \cup B) \setminus V) = \mu B + \mu A \checkmark$$

• "$\Rightarrow$" (Satz): Sei $U \subset X$ offen, reicht zz $\forall A \subset U \; \forall B \subset X \setminus U$

(**) $\mu(A \cup B) \geq \mu A + \mu(B)$ & $\Rightarrow$ OBdA $\mu A < \infty$.

Wir schaffen zunächst (Mengen mit) etwas Abstand in (**)



mit $U^c = X \setminus U$

$A \rightsquigarrow A_n := \{x \in A, \operatorname{dist}(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\} \Rightarrow \forall x \in A_n \; \operatorname{dist}(x,B) \geq \frac{1}{n}$

d.h. $\operatorname{dist}(A_n, B) \geq \frac{1}{n}$ & also

$$\forall n \quad \mu(A \cup B) \geq \mu(A_n \cup B) \geq \mu B + \mu A_n \geq \mu B + \mu A - \mu(A \setminus A_n)$$

da $\mu A \leq \mu A_n + \mu A \setminus A_n$. Es reicht also zz $\boxed{\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = 0}$

Das sieht hoffnungsvoll aus, da $\forall x \in A : \mathrm{dist}(x, U^c) > 0$

$\Rightarrow A = \bigcup_n A_n$ & $A_n \subset A_{n+1}$, also $A \setminus A_n \downarrow \emptyset \quad (= \bigcap_n A \setminus A_n)$

Aber wissen eben nicht ob / daß $A_n \in \mathcal{M}^*_\mu$, i.A. auch nicht wahr!

Statt dessen alte römische Empfehlung "divide et impera" nutzen. Zerlegen den Rest $A \setminus A_n$ in "Jahresringe" $R_k = A_{k+1} \setminus A_k$. In der Tat $\forall x \in A \setminus A_n \ \exists k \geq n$ $\frac{1}{k+1} \leq \mathrm{dist}(x, U^c) < \frac{1}{k}$, d.h. $A \setminus A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} R_k$ disjunkt. Um $\square$ zz reicht $\underbrace{\sum_{k}^{\infty} \mu R_k < \infty}_{(***)}$, da dann $\mu(A \setminus A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu R_k \to 0$ wenn $n \to \infty$. Dazu verstehen, dass Ringe pos. Abstand haben, wenn nicht direkt Nachbarn. Sei $x \in R_n$, $y \in R_m$ & $m \geq n+2$. Dann $\varrho(x,y) \geq \mathrm{dist}(x, U^c) - \mathrm{dist}(y, U^c)$

$$\geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} > 0$$ da $x \in A_{n+1}$ & $y \notin A_m$, d.h. $\mathrm{dist}(R_m, R_n) > 0$

wenn $|m-n| \geq 2$. Wie angedeutet, packen nun Ringe in $\underline{\underline{2}}$!! Gruppen, in jeder haben alle Ringe positive Abstände

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu R_{2k} = \lim_{K \to \infty} \sum_{k=1}^{K} \mu R_{2k} = \lim_{K} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{K} R_{2k}\Big)$$

μ metrisch

$$\leq \lim_K \mu(A) < \infty.$$ Analog, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu R_{2k-1} < \infty$

also $\sum_{k=1}^{\infty} \mu R_k < \infty$, wie in (***) verlangt.