

1. ERGÄNZUNGEN ZUR MASSTHEORIE

Definition 1. Ein äußeres Maß (im Sinne von Caratheodory) auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ so dass

- a) $\mu \emptyset = 0$,
- b) $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$ (σ -subadditiv)

Wir definieren das System der μ -messbaren Mengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mu}^* &= \{A \subset X : \forall M \subset X : \mu M = \mu(M \cap A) + \mu(M \setminus A)\} \\ &= \{A \subset X : \forall M \subset X : \mu M \geq \mu(M \cap A) + \mu(M \setminus A)\}. \end{aligned}$$

Folgender Satz ist aus der Maßtheorie zweifelsohne bekannt.

Satz 2. Sei μ ein äusseres Maß auf X , dann ist \mathfrak{M}_{μ}^* eine σ -Algebra und $\mu|_{\mathfrak{M}_{\mu}^*}$ ein Maß d.h. σ -additiv.

Beispiel 3. Überdeckungssysteme Sei $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit $\bigcup \mathfrak{C} = X$, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $C \in \mathfrak{C}$ mit $x \in C$, sowie das Volumen/Prämaß $V : \mathfrak{C} \rightarrow [0, \infty)$ (d.h. eine beliebige Funktion) gegeben.

Dann definiert

$$\mu_{\mathfrak{C}, V}(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in I} V(C_n) : C_n \in \mathfrak{C} \ \& \ \bigcup_{n \in I} C_n \supset A, I \subset \mathbb{N} \right\},$$

wobei $\sum_{\emptyset} = 0$, ein äusseres Maß.

Beispiel 4. Das Lebesguesche Maß $X = \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Familien von Quadern

- $\mathfrak{Q}_a = \{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] : a_i \leq b_i \text{ reell}\}$ abgeschlossen,
- $\mathfrak{Q}_o = \{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) : a_i \leq b_i \text{ reell}\}$ offen,
- $\mathfrak{Q}_h = \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n) : a_i \leq b_i \text{ reell}\}$ halboffen

und das Volumen $\text{Vol} : \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_a \cup \mathfrak{Q}_o \cup \mathfrak{Q}_h \rightarrow [0, \infty)$

$$\text{Vol}(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n) = \text{Länge}(I_1) \times \text{Länge}(I_2) \times \dots \times \text{Länge}(I_n).$$

Dann ist $\mu_{\mathfrak{Q}, V}(A) = \mathfrak{L}^*$ das (äußere) Lebesguesche Maß auf \mathbb{R}^n . Es verlangt etwas Sorgfalt, zu zeigen, dass wirklich $\mathfrak{L}^*(Q) = \text{Vol}(Q)$ für jeden Quader gilt, zum Beispiel kann die nicht-triviale untere Abschätzung sehr elegant durch Reduktion auf die Situation einer endlichen Überdeckung eines abgeschlossenen Quaders durch offene reduzieren und dann mit der Anzahl der Gitterpunkte von $\varepsilon \mathbb{Z}^n$ argumentieren, Details sollten ebenfalls aus der Maßtheorie bekannt sein.

Damit sieht man leicht, dass jeder Koordinatenhalbraum ist \mathfrak{L}^* -messbar und somit auch jede offene und jede Borelsche Menge.

Um auch für allgemeinere Maße in komplizierteren Geometrien genügend viele messbare Mengen zu finden nutzen wir eine weitere Idee von Caratheodory.

Definition 5. Sei (X, ρ) ein metrischer Raum. Dann ist ein äusseres Maß μ auf X metrisch wenn

$$(1) \quad \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B \text{ falls } A, B \subset X \text{ und } \text{dist}(A, B) > 0.$$

Satz 6. Wenn μ ein metrisches äusseres Mass auf (X, ρ) ist, dann ist jede offene und somit jedes Borelsche Menge μ -messbar.

Umgekehrt sieht man sofort, dass μ metrisch ist wenn jede offene Menge μ -messbar ist.

Definition 7. Hausdorffsches Maß Sei (X, ρ) ein metrischer Raum $d > 0$ und die Konstante $c_d = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2} + 1)$ gegeben dann ist für $\delta \in (0, \infty]$ das d -dimensionale Prämaß einer Menge $A \subset X$ als

$$\mathfrak{H}_\delta^d(A) = \inf \left\{ c_d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam}(M_i)}{2} \right)^d : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \ \& \ \text{diam}(M_i) < \delta \forall i \right\}$$

definiert. Da $\mathfrak{H}_\delta^d(A) < \mathfrak{H}_{\delta'}^d(A)$ wenn $0 < \delta' < \delta$, können wir das d -dimensionale Hausdorffmass der Menge A durch

$$\mathfrak{H}^d(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathfrak{H}_\delta^d(A) = \sup_{\delta > 0} \mathfrak{H}_\delta^d(A)$$

Es ist leicht zu sehen (wie in Beispiel 3), dass jedes \mathfrak{H}_δ^d ein äusseres Maß ist und auch dass $\mathfrak{H}_\delta^d(A \cup B) = \mathfrak{H}_\delta^d(A) + \mathfrak{H}_\delta^d(B)$ wenn $\delta < \text{dist}(A, B)$ ist da dann jede Menge M_i aus der Definition des Prämaßes nur eine der Menge A oder B schneiden kann. Somit ist \mathfrak{H}^d ein metrisches (äusseres) Maß.

Zur Vereinfachung wird für nicht-ganzzahliges d oft

$$\mathfrak{H}_\delta^d(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(M_i)^d : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \ \& \ \text{diam}(M_i) < \delta \forall i \right\}$$

benutzt, die obige spezielle Wahl der Konstanten c_d hat nur für $d \in \mathbb{N}$ eine Bedeutung und bewirkt, dass im \mathbb{R}^d das d -dimensionale Hausdorffsche Maß mit dem Lebesgueschen Maß übereinstimmt – der Beweis hiervon braucht die isodiametrische Ungleichung und folgt später.

Definition 8. Hausdorffsche Dimension Sei M eine Menge im metrischen Raum (X, ρ) . Wir definieren

$$\dim_{\mathfrak{H}}(M) = \sup\{d : \mathfrak{H}^d(M) = \infty\} = \inf\{d : \mathfrak{H}^d(M) = 0\}.$$

Da für $0 < d < d'$ und $\delta > 0$ und eine Menge M die Abschätzung

$$\mathfrak{H}_\delta^{d'}(M) \leq \frac{c_{d'}}{c_d} 2^{d-d'} \delta^{d'-d} \mathfrak{H}_\delta^d(M)$$

gilt, sehen wir leicht, dass $\mathfrak{H}^d(M) < \infty \Rightarrow \mathfrak{H}^{d'}(M) = 0$ und die obige Dimensionsdefinition korrekt ist.

Beispiel 9. Das Cantorsche Diskontinuum *Zeichnen Sie ein Bild!*

Wir definieren

$$C_0 = [0, 1], f_i(x) = \frac{x + 2i}{3} \ \& \ C_{n+1} = f_0(C_n) \cup f_1(C_n).$$

Dann $C_{n+1} \subset C_n$ kompakt und $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ ist total unzusammenhängend.

Es ist leicht zu sehen, dass C_n aus 2^n Intervallen der Länge 3^{-n} besteht und somit $\mathfrak{H}^d(C) \leq \frac{c_d}{2^d}$ für $d = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Beispiel 10. *Fortsetzung:* Die untere Abschätzung von $\mathfrak{H}^d(C)$ ist, wie üblich, schwieriger.

Wir definieren

$$g_0(x) = x \text{ \& } g_{n+1}(f_i(x)) = \frac{g_n(x) + i}{2} \text{ für } x \in C_n, \text{ also } g_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow [0, 1],$$

und genauer gilt also

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2}g_n(3x) \text{ wenn } x \in C_{n+1} \cap [0, \frac{1}{2}), \text{ und}$$

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(g_n(3x - 2) + 1) \text{ wenn } x \in C_{n+1} \cap (\frac{1}{2}, 1].$$

Mit Induktion zeigt man

- a) jedes g_n ist monoton nichtfallend,
- b) $g_n(C_n) = [0, 1] \forall n$,
- c) $|g_n(y) - g_n(x)| \leq |x - y|^d$ für $x, y \in C_n$ ($d = \log 2 / \log 3$),
- d) $|g_{n+k}(x) - g_n(x)| \leq 2^{-n}$ wenn $x \in C_{n+k}$.

Somit konvergieren die g_n gleichmässig gegen ein nichtfallendes $g : C \rightarrow [0, 1]$ wobei $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|^d$ und $g(C) = [0, 1]$. Daraus folgt auch, dass $g(a) = g(b)$ wenn $[a, b] \cap C = \{a, b\}$, wir können die *Cantorfunktion* g (englisch *Devil's staircase*) also konstant in den Komplementärintervallen von C wählen ohne die Hölderstetigkeitsbedingung zu verletzen. Wenn $\bigcup_i M_i \supset C$, dann oBdA $M_i = [\inf M_i, \sup M_i]$ ohne $\text{diam}(M_i)$ zu ändern und $\bigcup_i g(M_i) \supset [0, 1]$. Somit

$$1 \leq \sum_i \mathfrak{L}(g(M_i)) \leq \sum_i |\sup M_i - \inf M_i|^d$$

und $\mathfrak{H}^d(C) \geq c_d/2^d$ folgt.