Übungsblatt 4

1) Wr betrachten die, eventuell aus der Schule bekannte, Summationsformel für eine endliche geometrische Reihe

$$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\ \forall k \in \mathbb{N}: \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

   a) Beweisen Sie die Formel mit Induktion.
   b) Zeigen Sie direkt, so wie aber einfacher als im VL-Beweis der Additionsformel für Biniminalkoeffizienten im Pascalschen Dreieck, mit geeigneten Laufindexverschiebung usw., dass $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = (1 - q^{n+1})$.

2+3 Punkte

2) Gegeben seien 2026 rote und 2027 blaue Spielsteine. Wir legen alle in irgendeiner Reihenfolge nebeneinander in eine Linie, also auf die reelle Zahlengerade. Zeigen Sie, es gibt einen blauen Stein, so dass links von ihm die gleiche Zahl roter und blauer Steine liegt, diese Zahl darf auch Null sein.

   Hinweis: Die Spielsteine sind (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) wohlgeordnet, dies dürfen Sie voraussetzen.

5 Punkte

3) a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{6}$ auch irrational ist. Wo bricht Ihr Beweis für $\sqrt{4}$ zusammen?
   b) Beweisen Sie nun, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist.
   c) Zeigen sie, wenn $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also irrational, dann ist $x + y \not\in \mathbb{Q}$, also auch irrational.
   d) Begründen Sie nun: wenn $a < b$ reelle Zahlen sind, dann gibt es ein irrationales z so dass $a < z < b$.

$1 + 2 + 1 + 2$ Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Abgabe eventuell am 11.11.2026 um 23:59 im Moodlekurs. Vermutlich werden jedoch andere Abgabenmöglichkeiten eingerichtet werden (müssen). Bewahren Sie deshalb bitte auch jegliche (elektronische oder analoge) Kopien der ÜZ 2 und 3 auf, bis weitere Informationen erfolgen. Deshalb empfiehlt es sich, regelmäßig auf http://www.math.uni-leipzig.de/ kirchheim/AnaInf26.html zu schauen, beginnend ab 6.11 gibt es hoffentlich Neuigkeiten. (Da Sie keine Daten auf die Seite schicken, nur Text oder PDF herunterladen können Sie die eventuelle Sicherheitswarnungen beim Zugang der Seite ignorieren). Geben Sie diese Information (und das Blatt) Ihren Kommolitonen bitte weiter, danke.