Übungsblatt 3

1) Beweisen Sie auch, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ immer

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

gilt, nutzen Sie nur Lemma 2.38 und die Dreiecksungleichung. (Eine Fallunterscheidung ist unnötig und unpassend, die obige Ungleichung gilt auch für Abstände in Ebene & Raum, wobei $|z|$ der Abstand von z zum Ursprung 0 ist, dort ist eine positiv/negativ FU dann klar unmöglich). 2 Punkte

2) a) Sei $M \subset \mathbb{R}$, dann ist (siehe Lemma 2.34) $-M = \{m : -m \in M\}$ und $OS(M)$ bzw $US(M)$ seien die Menge der oberen und unteren Schranken von M. Zeigen Sie, wenn M von unten beschränkt, dann

$$OS(-M) = -US(M) \text{ und } -\sup(-M) = \inf(M).$$

b) Seien $\emptyset \neq M \subset N \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass $\sup(M) \leq \sup(N)$.

c) Beweisen Sie (direkt aus Def 2.43 und Satz 2.44, dh ohne Benutzung späterer Resultate): wenn $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ dann $n \geq 2 (= 1 + 1)$! Wenn Sie hierfür Mengen(Beispiele) aus der Vorlesung nutzen, zeigen Sie deren dort nur behaupteten entscheidenden Eigenschaften vollständig!

$2 + 1 + 2$ Punkte

3) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$,

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

b) $\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$. *[Hinweis: nutzen Sie die 2. Binomische Formel um $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ als Bruch darzustellen.]*

2+3 Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! Skizzen können und sollen der Lösungsfindung dienen, sind aber keine Beweise.

Abgabe am 3.11.2026 um 23:59 im Moodlekurs