1. Das Fundament der Mathematik: Mengen und Abbildungen

Der Begriff der Menge ist fundamental in der Mathematik, formal wenn auch nicht immer am schnellesten oder intuitivsten, lässt sich jedes mathematische Objekt als Menge auffassen. Hierauf beruht die universelle Gültigkeit und absolute Zuverlässigkeit mathematischer Resultate, wenn auch oftmals weniger formale, wie zB geometrisch - anschauliche, Auffassungen dem Verständnis und der Gewinnung neuer Erkenntnis besser dienen. Wir werden hier die mengentheoretisch Sicht wohl mehr als in der Schulmathematik betonen, müssen aber auf ein vollständig formale Abhandlung verzichten.

Diese würde die Sprache der Mathematik (Logik) in einem Umfang benutzen, der noch nicht vorhanden ist. Ihr Aufbau würde unser Vorankommen unnötig verzögern, zumal diese Begriffe der Logik sowieso später im Studium der Informatik gründlicher behandelt werden.

1.1. **Grundlegendes über Mengen.**

Definition 1.1. Menge *(intuitive Definition von G. Cantor)* ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft ("$P(x)$ gilt") haben.

Wir schreiben $x \in M$ wenn x ein Element von M ist, d.h. zu M gehört, und $x \notin M$ andernfalls. Dies kann schreibt man als

$$M = \{x \ : \ P(x) \text{ ist wahr}\}, \text{ also } x \in M \text{ bedeutet genau, dass } P(x) \text{ gilt.}$$

Den Grundbegriff mathematische Aussage (der sich nur über eine strikte Einschränkung der Formeln, welche diese beschreiben, widerspruchsfrei halten lässt - siehe Fundamentalkrise der Mathematik) führen wir hier aus obigen Gründen nicht formal ein. Wir betreiben also **naive** Mengenlehre, werden aber Situationen[1] vermeiden, die mit den strikten Einschränkungen (Zermelo- Fraenkel oder Bernays-Gödel- von Neumann) kollidieren.

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben, d.h. jedes Element von A auch ein Element von B ist, und umgekehrt jedes Element von B auch in A ist. ("Extensionalitätsprinzip" der ML).

Typischerweise studieren wir $\{x \in X \ : \ P(x)\}$, d.h. die Menge aller x aus einer (grossen fixen "Universal-")Menge X, für die die (mathematische) Aussage $P(x)$ wahr ist. Z.B. kann X die Menge aller natürlichen, ganzen oder reellen Zahlen sein oder auch aller Punkte der Ebene (alle diese Begriffe werden noch definiert).

Beispiel 1.2.

- $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n > 5\}$ *alle natürlichen Zahlen größer als* 5*, dh* 6 *und alle nachfolgenden*
- $\{n \in \mathbb{Z} \ : \$ *es existiert ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $n = 2k - 1\}$*, die ungeraden ganzen Zahlen*
- $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 \in \mathbb{Q} \ \& \ x \geq 0\}$ *- die "Wurzeln" der rationalen Zahlen*

Definition 1.3. *Wir sagen A ist* Teilmenge *von B (Notation* $A \subset B$*), wenn alle Elemente von A auch zu B gehören. (Statt A Teilmenge von B sagen wir oft A ist kleiner(oder auch kleiner gleich) B).*

[1] zum Beispiel die berüchtige $M = \{X, X \notin X\}$ mit der Frage $M \in M$

Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist $A \subset B$ gleichbedeutend mit $B \supset A$. wir schreiben $A \subsetneq B$ wenn $A \subset B$ und $A \neq B$ und sagen A ist *strikt* kleiner als B. **Unterschied:** Nicht alle Mengen sind in diesem Sinne vergleichbar! Jedenfalls gilt

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ und } B \subset A),$$

Grundlage einer typischen Methode um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen.

Definition 1.4. *Die leere Menge ist diejenige Menge, welche keine Elemente hat und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.*

Für jedes mathematische Objekt a bezeichnet $\{a\}$ diejenige Menge, die a und nur a als einziges Element enthält. Sie heißt Einermenge mit Element a. (dh $\{a\}=\{x : x=a\}$)

Bemerkung: Spätestens jetzt sieht man, wie schwer es allein wäre, den Begriff "gleich sein", z.B. im Sinne von oben, rigoros zu definieren.

DIY: Zeigen Sie als Übung, dass die Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}$ und $\{\{\emptyset\}\}$ alle paarweise voneinander verschieden sind.

Definition 1.5. *Aus gegebenen Mengen A, B konstruieren wir*

- $A \cap B = \{x : x \in A \ \& \ x \in B\}$ *Schnittmenge, Durchschnitt von A und B*
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ *Vereinigung von A und B*
- $A \setminus B = \{x : x \in A \ \& \ x \notin B\}$ *Differenzmenge von A und B*

Die Mengen A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$, d.h. sie keine gemeinsamen Elemente haben.

Es gilt also z.B.

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{b, a\}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{4, 2, 6\} = \{3, 1, 5\}.$$

Es gibt viele "Rechenregeln" für $\cap$ und $\cup$, wir erwähnen die wichtigsten, die Assoziativität, Kommutativität und Distributivität ausdrücken (symmetrischer als für "+" und "$\cdot$"!!)

Lemma 1.6. *Für alle Mengen A, B und C gilt*

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
iii) $A \cup B = B \cup A$
iv) $A \cap B = B \cap A$
v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Beweis:(Ihrer Wahl)

Als letzte grundlegende Mengenoperation führen wir die Produktmenge ein, mit der sich z.B. die Euklidische Ebene aus der Zahlengeraden konstruieren lässt. Hierzu brauchen wir den Begriff des geordneten Paares, den klarerweise haben $x-$ und $y-$Koordinate eines Punktes in der Ebene ganz verschiedene Bedeutung! Also $(1,0) \neq (0,1)$, aber bei Mengen gilt ja $\{0,1\} = \{1,0\}$!?

Definition 1.7. *Für die mathematischen Objekte a und b definieren wir das geordnete Paar $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.*

Dann erhalten wir wie gewünscht

Lemma 1.8. *Für alle mathematischen Objekte a,b,c,d gilt*

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \text{ und } b = d).$$

Beweis: *Idee:* Rückrichtung trivial, bleibt z_z aus $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ folgt $a = c$ und $b = d$. Da a und c einzeln in Mengen auftreten, ist es wohl leichter zuerst $a = c$ z_z.

Dies beweisen wir indirekt , d.h. mit Widerpruch. **Sonst** wäre $a \neq c$ und also $c \notin \{a\}$. Dies zeigt $\{a\} \neq \{c\}$ und $\{a\} \neq \{c,d\}$ wegen des Existenzionalitätsprinzips, also $\{a\} \notin \{\{c\},\{c,d\}\}$ - ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit kann "sonst" nicht eintreten und es muss $a = c$ gelten.

Die Voraussetzung gibt nun also $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$, bleibt $b = d$ zu zeigen. Hierzu machen wir eine vollständige Fallunterscheidung. **Falls** $a = b$, dann folgt $\{\{a\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$ und also $\{a\} = \{a,d\}$. Dh $d \in \{a\}$ und also $a = b = c = d$. **Sonst** $b \notin \{a\}$, also $\{a,b\} = \{a,d\}$ und somit $b \in \{a,d\}$. Also $b = a$ oder $b = d$, aber $a = b$ war ja gerade mit "sonst" ausgeschlossen, also muss $b = d$ gelten. ☺

Nun können wir Triple $(a,b,c) := ((a,b),c)$, Quadruple $(a,b,c,d) = ((a,b,c),d)$ usw als geordnete Objekte mit analogen Gleichheitskriterien definieren.

Definition 1.9. *Für zwei Mengen A und B ist ihr (kartesisches) Produkt definiert als die Menge*

$$A \times B = \{(a,b)\ ,\ a \in A \,\&\, b \in B\} := \{x\ :\ \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = (a,b)\}.$$

Die linke, kompaktere Schreibweise wird wegen der Schreibökonomie öfters genutzt.

1.2. **Grundlegendes über Abbildungen.** Wir beginnen mit einer recht abstrakt anmutenden Definitionen, diese ist das Resultat eines Verallgemeinerungsprozesses, der über sehr lange Zeit ging. Beispiele aus der Schulmathematik erläuetern das Ganze aber sehr gut.

Definition 1.10. *Eine Abbildung F bildet eine Menge X in eine Menge Y ab, wenn*

$$F \subset X \times Y, \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x,y) \in F \text{ und } \forall (x,y),(x,y') \in F : y = y'.$$

Wir schreiben dann $F : X \to Y$, und wenn $(x,y) \in F$ dann schreiben wir $y = F(x)$. Wir identifizieren also die Abbildung $F = \{(x,F(x))\ :\ x \in X\}$ direkt mit ihrem "Graphen".

Dann heißt X der Definitionsbereich, mit $dmn(F)$ bezeichnet, und das Bild der Funktion ist $im(F) = \{y \in Y \ : \ existiert\ ein\ x \in X\ mit\ y = F(x)\}$. Der Wertebereich der Funktion ist (für uns) nicht eindeutig festgelegt: jede Menge, die $im(f)$ enthält, kann als solcher genutzt werden.

Wenn $Y = \mathbb{R}$, (eventuell $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$) nennen wir F oftmals Funktion und benutzen gerne kleine Buchstaben $f, g, h, \ldots$.

Nun ein paar Illustrationen für Funktionen, wir greifen dabei Resulaten aus dem nächsten Kapitel vor, was aber hier erlaubt sein sollte, da diese auch schon in der Schule diskutiert wurden.

Beispiel 1.11.

(1) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ *definiert durch* $f(a) = 4 - a$ *für* $a \in \{1, 2, 3\}$
(2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definiert als* $f(n) = 1$ *für alle* $(\forall)n \in \mathbb{N}$, *eine konstante Funktion*
(3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *definiert als* $f(n) = \frac{1}{n}$ *wenn* $n \in \mathbb{N}$
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$, *die Identität (auf* $\mathbb{R}$)
(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$, *die Standardparabel*
(6) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *definiert durch* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$, *hierbei* $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$. *Diese Funktion f_6 ist verschieden von der Funktion f_5 aus (5), obwohl sie die gleiche Formel nutzt, hat sie ganz andere Eigenschaften, siehe unten. (Def 1.13)*
(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $f(x) = x$ *wenn* $x \geq 0$ *und* $f(x) = x^3$ *sonst (dh* $x < 0$*), eine der vielen Funktionen/Abbildungen die nicht durch eine (einzige) geschlossene Formel dargestellt werden. (DIY*: kann als Grenzwert einer geschlossenen Formel dargestellt werden)*

Definition 1.12. Bild und Urbild
Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung und seien $X' \subset X$ und $Y' \subset Y$ gegeben. Dann definieren wir

$$F(X') = \{F(x) \ : \ x \in X'\} \subset Y \text{ als } F\text{-Bild von } X', \text{ und}$$
$$F^{-1}(Y') = \{x \in X \ , \ F(x) \in Y'\}, \text{ das } F\text{-Urbild von } Y'.$$

Bemerkung/Warnung Das F-Urbild existiert immer, auch wenn die "inverse Funktion F^{-1}", siehe unten, nicht definiert ist. $F(X) = \mathrm{im}(F)$ gilt auch immer.

Lemma 1.13. *Sei $F : X \to Y$ und beliebige $X_1, X_2 \subset X$ sowie $Y_1, Y_2 \subset Y$ gegeben. Dann gilt*

a) $F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) \cup F(X_2)$,
b) $F(X_1 \cap X_2) \subset F(X_1) \cap F(X_2)$,
c) $F^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = F^{-1}(Y_1) \cup F^{-1}(Y_2)$ *und*
d) $F^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = F^{-1}(Y_1) \cap F^{-1}(Y_2)$.

Beweis:

Nun wollen wir Begriffe einführen, die beschreiben, inwieweit F eine umkehrbare Abbildung ist.

Definition 1.14. *Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt*

- *injektiv (auch $1-1$ genannt) wenn $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$,*
- *surjektiv (bildet* auf *Y ab, engl "onto") wenn $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$,*
- *bijektiv wenn F injektiv und surjektiv ist.*

Bemerkung Man sieht sofort: F ist injektiv genau dann wenn das F Urbild jeder Einerteilmenge von Y leer oder eine Einermenge ist. Und F ist surjektiv genau dann wenn $F(X) = Y$ genau dann wenn das Urbild jeder nichtleeren Teilmenge von Y nichtleer ist. Die Beispiele aus 1.11 zeigen, dass eine Abbildung F surjektiv werden kann, ohne F zu ändern, wohl aber das Y, siehe $\hat{f_2} : \mathbb{N} \to \{1\}, \forall n \in \mathbb{N} : \hat{f_2}(n) = 1$, aber dies geht immer $(Y = F(X))$. Wenn eine Funktion F nicht injektiv ist, muss man einige Paare aus F entfernen um Injektivität zu erreichen (5) versus (6).

Definition 1.15. Inverse- oder Umkehrfunktion *Sei $F : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrfunktion als*

$F^{-1} : Y \to X$ so: wenn $y \in Y$ dann ist $F^{-1}(y)$ dasjenige $x \in X$ welches $F(x) = y$ erfüllt.

Bemerkung Die Existenz eines solchen x folgt aus der Surjektivität von F, seine Eindeutigkeit da F injektiv ist. **Dann** gilt auch $\forall Y' \subset Y = F^{-1}(Y') = (F^{-1})(Y')$, was die etwas verwirrende aber praktische Notation für F-Urbilder erklärt.

Beispiel 1.16. *Die Funktion f_6 aus Beispiel 11(6) ist injektiv (siehe Übungszettel) und surjektiv (wie der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen aus zeigen wird). Ihre Umkehrfunktion ist die*

$$\textit{(Quadrat)Wurzelfunktion} \quad (f_6)^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \textit{ mit } (f_6)^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Der letzte wichtig(st)e Begriff betrifft eine Operation speziell für Abbildungen, die es erlaubt weitere zu konstruieren

Definition 1.17. Zusammensetzung
Seien Mengen X, Y, Z und Abbildungen $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ gegeben, dann definieren wir die Verkettung von G und F als

$$G \circ F : X \to Z \textit{ durch } (G \circ F)(x) = G(F(x)) \textit{ wenn } x \in X.$$

Es gibt viele sehr allgemeine aber etwas abstrakte Resultate über Verkettung, hier nur 2 ganz einfache, bevor wie die Beispiele aus 1.11 konkret nutzen.

Lemma 1.18. *Seien Mengen X, Y, Z und Abbildungen $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ gegeben.*
Dann ist F injektiv falls $G \circ F$ injektiv ist, und G surjektiv wenn $G \circ F$ so ist. Beide Schlussfolgerungen lassen sich nicht umkehren!

Beweis:

Beispiel 1.19. (1) $f_5 \circ f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f_5 \circ f_3(n) = \frac{1}{n^2}$

(2) *Sei* $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *definiert als* $d(x) = \sqrt{x}$. *Wenn* g *das quadratische Polynom* $y \mapsto y^2 - 3y + 1$ *für alle reellen* y. *Dann ist* $g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 = x + 1 - 3\sqrt{x} \text{ für alle } x \geq 0.$$

2. Reelle Zahlen

Diese sind das Brot des Analytikers. Für die Konstruktion der reellen Zahlen siehe W.Rudins Buch "Analysis", wir setzen hier die Existenz gleich voraus. Dann sind die reellen Zahlen eine Menge $\mathbb{R}$ mit

- zwei Rechenoperationen die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zweier reeller Zahlen ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ bzw. $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und
- einer Ordnungs- (oder Vergleichsrelation) $<$

so dass die im Folgenden allmählich diskutierten 13 Axiome gelten. Hierbei leiten wir auch die meisten der aus der Schule bekannten Rechenregeln für Gleichungen und Ungleichungen her, reduzieren diese also auf unsere wenigen Axiome.

I. Körperaxiome

Davon gibt es 9, und sie betreffen nur die Rechenoperationen (siehe auch Kapitel 2 im Buch Otto Forster, Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, elektronische CampusLizenz an der Uni Leipzig)

	Addition		Multiplikation	
(AA)	$(x+y)+z = x+(y+z)$	(MA)	$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$	$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz
(AK)	$x+y = y+x$	(MK)	$x\cdot y = y\cdot x$	$\forall x,y \in \mathbb{R}$ Kommutativgesetz
(AN)	$\exists 0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}:\ 0+x=x$	(MN)	$\exists 1 \in \mathbb{R} : (1 \neq 0\ \&\ \forall x \in \mathbb{R} : 1\cdot x = x)$	neutrales Element
(AI)	$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : x+y=0$	(MI)	$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0\, \exists y \in \mathbb{R} : x\cdot y = 1$	inverses Element
(DG)	$x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$			$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ Distributivgesetz

Bemerkung 2.1. Neutrale Elemente in (AN),(MN) sind, als Konsequenz der Axiome eindeutig - ohne dies explizit vorauszusetzen, es ist allerdings zu beweisen! Jedenfalls macht es die rechten Seiten in (AI),(MI) wohldefiniert. Das neutrale Element der Addition wird als Null bezeichnet, das neutrale Element der Multiplikation als Eins.

Wir beweisen hier nur die Eindeutigkeit der Null, betrachten wir also 0_I und 0_{II} in $\mathbb{R}$ so dass

$$\text{nach (AN) gilt:}\quad \forall x \in \mathbb{R} : 0_I + x = x \text{ und } \forall y \in \mathbb{R} : 0_{II} + y = y.$$

Dann folgt

$$0_{II} \overbrace{=}^{(AN)\text{ mit } x=0_{II}} = 0_I + 0_{II} \overbrace{=}^{(AK)} 0_{II} + 0_I \overbrace{=}^{(AN)\text{ mit } y=0_I} = 0_I,$$

also gilt in der Tat $0_I = 0_{II}$, wie behauptet. Die Eindeutigkeit der Eins folgt analog.

Bemerkung 2.2. Wir sehen, ohne das Distributivgesetz wären die Addition und die Multiplikation fast gleichwertige("isomorphe") Operationen, man beachte allerdings den Ausschluss der Null in (MI). Erst dieses neunte Axiom bricht die weitgehende Symmetrie zwischen den beiden.

Bemerkung 2.3. Inverse Elemente in (AI),(MI) sind eindeutig für gegebenes x, siehe Satz 2.6 für eine allgemeinere Behauptung. Wir schreiben $-x$ bzw. x^{-1} für additives bzw. multiplikatives Inverses.

Bemerkung 2.4. Die 9 Körperaxiome charakterisieren $\mathbb{R}$ noch nicht, es gibt andere (noch zu diskutierende) Körper, welche diese ebenfalls erfüllen. Siehe, zB. $\mathbb{Q}$ oder Beispiel 2.12. Ein ganz trivialer Körper ist $\{0\}$ mit den Operationen $0+0=0=0\cdot 0$. Um dieses Beispiel auszuschliessen, fordern wir im Folgenden **immer** $0 \neq 1$.

Lemma 2.5. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben wir*

$$x = y \Leftrightarrow x + s = y + s \quad \text{und} \quad x = y \Leftrightarrow x \cdot f = y \cdot f.$$

Wir zeigen nur den zweiten Teil

Satz 2.6. *Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen*

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$. Dieses z ist eindeutig und durch $z = y + (-x)$ gegeben.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0\, \exists z \in \mathbb{R} : xz = y$. Dieses z ist eindeutig und durch $z = y(x^{-1})$ gegeben.

Wir schreiben $z = y - x$ für die Lösung in a) und $z = y/x$ für die Lösung in b).

Wir zeigen nur den zweiten Teil

Satz 2.7. $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$. *("Neutral für $+$ erzwingt: Terminator für $\cdot$ sein.")*

Korollar 2.8. $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x.$

Satz 2.9. $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ *oder* $y = 0)$.
Algebraiker formulieren das als: Keine "Nullteiler" in $\mathbb{R}$ *bzw einem Körper/ Integritätsbereich.*

Beweis zB mit Fallunterscheidung $x = 0$ versus $x \neq 0$ und Lemma 2.5.

Lemma 2.10.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$
b) $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0 : (x^{-1} \neq 0 \ \& \ (x^{-1})^{-1} = x)$

Wir zeigen nur den zweiten Teil.

Beispiel 2.11. $z^2 = 1 \Leftrightarrow (z = 1$ oder $z = -1)$, *bzw allgemeiner* $\forall z, x \in \mathbb{R} : z^2 = x^2 \Leftrightarrow (z = x \vee z = -x)$.

Dies folgt aus der Binomischen Formel und Satz 2.9

Beispiel 2.12. Ein endlicher Körper
$GF(3) = \{0, 1, 2\}$ *mit folgenden Rechenregeln ("Restklassen modulo 3" - für Experten).*

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

also $2^{-1} = 2$ *und* $2 = -1$ *hier.*

Die Überprüfung der neun Körperaxiome von hand ist möglich aber mühsam. (Einfacher gestaltet sich dies z.B. für $GF(2) = \{0, 1\}$ *mit entsprechenden Rechenregeln, von denen nur* $1 + 1 = 0$ *nicht unmittelbar aus (AN),(MN) oder Satz 1.5 folgt). Es zeigt sich, das für jede Primzahl* p *ein Körper* $GF(p)$ *mit* p *Elementen existiert, und die Gültigkeit der Körperaxiome (AA),(MA),(AK),(MK),(AN),(MN) und (DG) folgt leicht aus ähnlichen Aussagen für die die natürlichen Zahlen ohne lästiges Probieren aller Einzelfälle.)*

Bemerkung 2.13. *In den bisherigen Beweisen ließen sich die Schlussfolgerungen jeweils leicht aus den Axiomen herleiten. Wir brauchten noch keine feineren Methoden wie z.B. den indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis). Dies wird sich im Folgenden ändern.*

Die bisher definierte Körperaxiome ermöglichen Rechnen mit Gleichungen, für das Rechnen mit Ungleichungen brauchen wir den Begriff der (An)Ordnung. (vergleiche Kapitel 3 in O.Forsters Buch) Primär muss man festlegen, welche Zahlen "postiv", d.h. größer als Null sind. Diese Zahlen müssen dann die im Folgenden angeführten Eigenschaften haben:

II. Anordnungsaxiome

Es gibt eine Menge $\mathbb{P}$ von reellen Zahlen (d.h. $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$), so dass

(O.1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt *genau* eine der Aussagen: $x \in \mathbb{P}$, $x = 0$, $-x \in \mathbb{P}$ "Trichotomie"

(O.2) Wenn $x \in \mathbb{P}$ & $y \in \mathbb{P}$ dann $x + y \in \mathbb{P}$ "Abgeschlossenheit bezüglich Addition"

(O.3) Wenn $x \in \mathbb{P}$ & $y \in \mathbb{P}$ dann $xy \in \mathbb{P}$ "Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation"

Definition 2.14. Wir sagen

$0 < x$ (d.h. x ist *positiv*) gdw. $x \in \mathbb{P}$; $0 > x$ (d.h. x ist negativ) gdw. $-x \in \mathbb{P}$
$x < y$ (d.h. x kleiner y) gdw. $0 < y - x$; $x > y$ (d.h. x größer y) gdw. $0 > y - x$
$x \leq y$ gdw. ($x < y$ oder $x = y$); $x \geq y$ gdw. ($x > y$ oder $x = y$)

Bemerkung 2.15.
a) *jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist positiv, negativ oder null*
b) *nach Satz 1.5 gilt* $x = y \Leftrightarrow 0 = y - x$, *also* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y$ oder $x > y$ oder $x = y$
c) $x < y \Leftrightarrow -(x - y) = y - x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow 0 > x - y \Leftrightarrow y > x$, *also* x *kleiner* y *genau dann wenn* y *grösser* x.
d) $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{P}_0 = \mathbb{P} \cup \{0\}$ *nichtnegative Zahlen*

Satz 2.16. *Transitivität der Ordnung* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y \ \& \ y < z) \Rightarrow x < z$

Beweis nutzt nur $\mathbb{P} + \mathbb{P} \subset \mathbb{P}$, siehe PräsenzÜB W2.

Bemerkung 2.17. *Also* $(x \leq y \;\&\; y \leq z) \Rightarrow x \leq z$*, mit* $x < z$ *falls zudem* $x < y$ *oder* $y < z$*, siehe auch PräsenzÜB W2.*

Lemma 2.18. *Translationsinvarianz* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$*, vergl. L.2.5.*

Beweis

Lemma 2.19. Addition von Ungleichungen

$$\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (x < y \;\&\; u < v) \Rightarrow x + u < y + v.$$

Beweis nutzt nur $\mathbb{P} + \mathbb{P} \subset \mathbb{P}$, siehe PräsenzÜB W2.

Proposition 2.20. *Spiegelung* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow -y < -x$

Beweis 2 Möglichkeiten addiere $-(x + y)$ und nutze 2.18, oder direkt Def. 2.14

Lemma 2.21. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *mit* $x < y : (0 < z \Rightarrow zx < zy), (0 > z \Rightarrow zx > zy)$

Beweis nutzt $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \subset \mathbb{P}$ wenn $z > 0$, dann P.2.20 wenn $z < 0$.

Korollar 2.22. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (0 \leq x < y \;\&\; 0 \leq u < v) \Rightarrow xu < yv$

Beweis

Satz 2.23. $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \Rightarrow 0 < x \cdot x = x^2$

Beweis FU(=Fallunterscheidung): $x > 0 \vee (-x) > 0$.

Korollar 2.24. $0 < 1$, *da* $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$*!*

Obwohl $1 > 0$ und auch die etwas allgemeinere Ungleichung $0 < x^2$, $x \neq 0$ sehr natürlich erscheinen, sind sie zentral für die weitere Entwicklung der Analysis! Weil in GF(3), siehe Beispiel 2.12, $1 + 1 + 1 = 0$ kann in diesem Körper keine geeignete Menge $\mathbb{P}$ "positiver" Elemente gefunden werden.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass umgekehrt jede positive reelle Zahl auch das Quadrat einer reellen Zahl ist. Dies wird noch ein weiteres (letztes) Axiom brauchen.

Proposition 2.25. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

a) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

b) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$ *("Spiegelung an der* 1*")*

Beweis (In a)) auch Widerspruchsbeweis für $\neg(x^{-1} < 0)$ möglich)
a) Wenn $x > 0$, dann $x \neq 0$ und $x^{-1} \neq 0$ (Lemma 2.10.b)). Somit $0 < x^{-1}x^{-1}$ wegen Satz 2.23. Wegen $x > 0$ zeigt Lemma 2.21, dass

$$0 = x \cdot 0 < x(x^{-1} \cdot x^{-1}) = (x \cdot x^{-1})x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

Umgekehrt, da $(x^{-1})^{-1} = x$ folgt aus dem gerade Gezeigten die Umkehrimplikation.
b) Da $0 < x, y$ gilt nach Teil a), dass $0 < x^{-1}, y^{-1}$ und also $0 < x^{-1}y^{-1}$. Nun nutzen wir wieder Lemma 2.21, um

$$0 = 0(x^{-1}y^{-1}) < y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < x^{-1} = y(x^{-1}y^{-1})$$

zu folgern.

Beispiel 2.26. *Seien* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $x > 0$ *sowie* $y > 0$*. Dann gilt* $x < y$ *genau dann wenn* $x^2 < y^2$*.*

Beweis Vergleiche Bsp 2.11.

Beispiel 2.27. *Wenn* $x, y \in \mathbb{R}$*, dann folgt aus* $x^2 + y^2 = 0$*, dass* $x = y = 0$*.*

Beweis Nutzt Satz 2.23, Bemerkung 2.17 und Satz 2.9.

Beispiel 2.28. *Sei* $0 < x < y$ *und möge* $\sqrt{xy}$ *existieren (dh. positive Zahl, deren Quadrat* xy *ist). Dann gilt die AG-Ungleichung (zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)*

$$y > \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > x.$$

Beweis Erste $>$ nutzt L.2.18 und L. 2.21, die beiden anderen auch S.2.23 und Bsp.2.26.

Definition 2.29. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben, wir definieren dann*

$$\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \le y \\ y & \text{wenn } x > y \end{cases}, \text{ und } \max(x,y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x \le y \\ x & \text{wenn } x > y \end{cases}.$$

Mittels $\max(x,y,z) = \max(x, \max(y,z))$ usw. ist Maximum und analog Minimum für beliebige "endliche" (noch nicht genau definiert!, jedenfalls klappt es mit Induktion - kommt nochmal ordentlich- für alle $\{x_1, \ldots, x_n\}$) Mengen M reeller Zahlen definiert. Diese größten und kleinsten Elemente einer Menge existieren nicht mehr, wenn wir, wie im Folgenden, allgemeine unendliche Mengen betrachten.

Beispiel 2.30. *$M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ hat kein Minimum.*

Beweis indirekt, $\frac{1}{2} \cdot \min(M)$ liefert einen Widerspruch falls $\min(M)$ existiert.

Definition 2.31. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig*

a) *$s \in \mathbb{R}$ ist $\max M$, das Maximum der Menge M, wenn $s \in M$ und $\forall x \in M : x \le s$.*
$s \in \mathbb{R}$ ist $\min M$, das Minimum der Menge M, wenn $s \in M$ und $\forall x \in M : x \ge s$

b) *$s \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke (**OS**) für M wenn $\forall x \in M : x \le s$, $s \in \mathbb{R}$ ist untere Schranke (**US**) für M wenn $\forall x \in M : x \ge s$*

- *$s \in \mathbb{R}$ ist **Supremum** von M ($s = \sup M$) wenn s die kleinste aller oberen Schranken von M ist, d.h.*

$$(\forall x \in M : x \le s) \ \& \ (\forall t \text{ OS von } M : t \ge s).$$

- *$s \in \mathbb{R}$ ist **Infimum** von M ($s = \inf M$) wenn s die größte aller unteren Schranken von M ist, d.h.*

$$(\forall x \in M : x \ge s) \ \& \ (\forall t \text{ US von } M : t \le s).$$

- *M ist von oben (bzw. unten) beschränkt wenn es eine obere (bzw. untere Schranke) für M gibt. M beschränkt wenn von unten und oben beschränkt.*

Beispiel 2.30. *(Fortsetzung)* $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ *hat keine OS,* s *ist US gdw.* $s \leq 0$*, also* $\inf M = 0$ *aber* $\sup M$ *existiert nicht.*

Beweis

Die Existenz von inf und sup wann immer es entsprechende Schranken gibt, gilt nicht nur für so einfache Mengen wie dieses M (Intervall), sondern im Allgemeinen. Das unterscheidet $\mathbb{R}$ von anderen Körpern und ist formuliert im letzten noch benötigten

III. Vollständigkeitsaxiom

(VA) Für jede nichtleere und von oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ existiert das Supremum $\sup M$.

Lemma 2.32. *Sei* M *eine Menge reeler Zahlen, dann (*$\exists \max M \Leftrightarrow \sup M \in M$*)*

Beweis

Proposition 2.33. *Sei* $M \subset \mathbb{R}$ *nichtleer und von oben beschränkt,* $s \in \mathbb{R}$*. Dann*

a) $s \geq \sup M \Leftrightarrow \forall m \in M : m \leq s$

b) $s = \sup M \Leftrightarrow (\forall m \in M : m \leq s \;\&\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in M : s - \varepsilon < m)$

Approximationsprinzip, *benötigt VA nicht!*

Beweis

Lemma 2.34. *Seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleer und von oben beschränkt. Dann*

a) $\inf(-M) = -\sup M$,

b) $\sup(M+N) = \sup M + \sup N$,

wobei $-M = \{-m : m \in M\}$ ist die "Spiegelung" von M, und $M+N = \{m+n : m \in M \ \& \ n \in N\}$ die "Minkowski" Summe der beiden Mengen ist.

Beweis a) folgt direkt aus der Definition, von sup und inf, wir zeigen nur b) unter Benutzung des Approximationsprinzipes und des $\frac{\varepsilon}{2}$-Tricks. Inbesondere haben wir diesen in der VL, unter Einführung einer weiteren, noch zu bestimmenden Größe, $\delta > 0$, die in der Appriximationseigenschaft für M und N genutzt wird, motiviert.

Nun die erste überraschende und wichtige Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms.

Satz 2.35. *Für alle positiven reellen x existiert ein eindeutiges $w > 0$, so dass $w^2 = x$.*

Wir schreiben für diese Zahl $w = \sqrt{x}$ und nennen sie Wurzel aus(von) x.
Beweis Die Schlüsselidee ist zu zeigen, dass $w^2 = x$ wobei $w = \sup(M)$ und $M = \{y > 0 : y^2 < x\}$. Mit der ersten binomischen Formel können wir $w^2 > x$ und auch $w^2 < x$ widerlegen.

Ein paar mehr Details zum Vorgehen Zentral ist Bsp 2.26: wenn $x, y > 0$ dann ($x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$). Nachdem wir die Existenz von w gezeigt haben (siehe VL), schließen wir $w^2 \neq x$ durch Fallunterscheidung aus. In beiden Fällen werden wir zeigen und dann ausnutzen dass die UGl $w^2 < 2$ und $w^2 > 2$ richtig bleiben, wenn w durch $w + \Delta$, mit Δ genügend nahe bei Null, ersetzt wird. Dazu nutzen wir die binomische Formel $(w+\Delta)^2 = w^2 + 2w\Delta + \Delta^2$.

Erster Fall $w^2 > x$, wir wollen zeigen es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass noch immer $(w-\varepsilon)^2 > x$, also $\Delta = -\varepsilon < 0$. Wir betrachten also die quadratische UGl $w^2 - 2w\varepsilon + \varepsilon^2 > x$. Diese können wir nicht exakt lösen, da hierfür eine Formel benutzt, in der Wurzeln auftreten, deren Existenz wir ja erst zeigen wollen. Deshalb vereinfachen wir die quadratische UGl indem wir ε^2 durch die Konstante 0 ersetzen, also eine Abschätzung von unten vornehmen. Dabei können wir Lösungen verlieren, aber wir brauchen ja nur eine (positive und kleiner w). In der Tat, wenn $0 < \varepsilon < w$ und $x < w^2 - 2w\varepsilon$ dann gilt die quadratische UGl auch. Die lineare UGl verlangt genau $\varepsilon < \frac{x-w^2}{2w}$ und damit ist $\varepsilon = \frac{\min}{(}w, \frac{x-w^2}{2w})$ eine zulässige Wahl mit $0 < w - \varepsilon$ und $x < w^2$, aus Bsp 2.26 folgt $y < w - \varepsilon$ wenn $y \in M$, also $\sup(M) \leq w - \varepsilon$, Widerspruch. Im zweiten Fall suchen wir analog $\varepsilon > 0$ mit $(w + \varepsilon^2) < x$, also wäre $\sup(M) < w + \varepsilon \in M$, Widerspruch. Die enstehende quadratische UGl vereinfachenwir zu einer linearen durch Abschätzung von oben $\varepsilon^2 < \varepsilon$ wenn $\varepsilon \in (0, 1)$ und gehen dann analog zum 1. Fall vor.

Absolutbetrag, Maximum und Minimum

Definition 2.36. *Sei $x \in \mathbb{R}$, wir definieren den Betrag von x alst*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 2.37. i) *wichtige geometrische Bedeutung: $|x-y|$ Abstand von x zu y*
ii) *aus der Definition (mit **F**all**U**nterscheidung $x >, =, < 0$) folgt leicht $|x| = |-x|$ und also $|x| \geq 0$ mit "=" gdw. $x = 0$, und somit $x \leq |x|$.*

Lemma 2.38. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*
a) $-|x| \leq x \leq |x|$, $x^2 = |x|^2$ *und somit* $|x| \in \{-x, x\}$.
b) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ *(und dann $y \geq 0$),*

Beweis: a) Nach 2.37.ii) $x \leq |x|$ und $-x \leq |-x| = |x|$, also auch $x = -(-x) \geq -|x|$. Wenn $x \geq 0$ dann $x = |x|$ und also $|x|^2 = x^2$, sonst ist $-x > 0$, also $|x|^2 = |-x|^2 = (-x)^2 = x^2$. Nach Bsp.2.11 gilt somit $|x| = x \vee |x| = -x$.

Für b): Da nach Prop 2.20 $-y \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x \leq y$ und weil $|x| = |-x|$, können wir oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $0 \leq x$. Dann gilt also

$$|x| \leq y \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq |x| \leq y.$$

Definition 2.39. *Sei $x \in \mathbb{R}$, wir definieren das Signum (entspricht Vorzeichen) von x als*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 2.40. $\operatorname{sgn}(0)$ *wird im Allgemeinen und in dieser VL als* 1 *definiert, auch* -1 *ist möglich und ebenfalls* $\operatorname{sgn}(0) = 0$ *wird gelegentlich in der Literatur verwendet. In jedem Falle gilt, wie zB eine leichte FU zeigt*

$$\forall x \in \mathbb{R} \; : \quad |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x \text{ und } x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|.$$

Dies hilft oftmals, lästige kompliziertere FUen einzusparen.

Satz 2.41. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$*
a) $|xy| = |x||y|$ *Multiplikativität*
b) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecks-Ungleichung!*

Beweis: a) Nach (MK) und 2.38.a) gilt $|x|^2|y|^2 = x^2y^2 = |xy|^2$, also liefert Bsp 2.26 die Behauptung. Um b) zu zeigen, addiere die Ungleichung aus 2.38.a) für x und für y um

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

zu erhalten, nun gibt 2.38.b) die Behauptung.

Lemma 2.42. *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max(x, y) = \frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2}.$$

Beweis FU, bzw reicht es den Fall $x \geq y$ zu betrachten, und dann die Symmetrie beider Seiten (LS wegen 2.37.ii)) unter der Vertauschung von x und y zu nutzen.

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist klar: gehe von der Mitte $\frac{x+y}{2}$ zwischen zwei Zahlen x, y den halben Abstand $\frac{|x-y|}{2}$ der beiden Zahlen in positive Richtung und gelange zur grösseren der beiden Zahlen. Es gilt die analoge Formel für $\min(x, y)$.

Zahlbereiche

Nachdem wir alle grundlegenden Axiome für $\mathbb{R}$ eingeführt und erste Anwendungen gesehen haben, benennen wir noch wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ – wie die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen.

Definition 2.43. *$M \subset \mathbb{R}$ heißt* induktiv *wenn $1 \in M$ und $\forall n \in \mathbb{R} : n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.*

Satz 2.44. *Es gibt eine* kleinste *induktiven Menge, dh. sie ist Teilmenge jeder induktiven Menge.*

Beweis Idee: der Durchschnitt der Familie aller induktiven Mengen ist induktiv. Genauer: wir bezeichnen

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : \text{ wenn } M \subset \mathbb{R} \text{ induktiv, dann } x \in M\}.$$

Nun beweisen wir, dass $\mathbb{N}$ induktiv ist und in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten ist.

Diese kleinste induktive Menge ist eindeutig, wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet und ihre Elemente werden natürliche Zahlen genannt.

Bemerkung 2.45. *Es gibt zweifelsohne viele induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$, zB. $\mathbb{R}, [-2, \infty)$ oder $\mathbb{Z}$. Die Menge $[3, \infty)$ ist nicht induktiv, da $1 \notin [3, \infty)$.*

Weil $M = \{1\} \cup [2, \infty)$, wobei $2 = 1 + 1$, induktiv ist, gilt $(1, 2) \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Analog zeigt man $(1, 3) \cap \mathbb{N} = \{2\}$.

Korollar 2.46. *(Schwaches) Induktionsprinzip: M induktiv $\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$. Also wenn P ein mathematisches Aussagenprädikat ist, so dass: $P(1)$ wahr ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $P(n)$ wahr auch $P(n+1)$ wahr folgt, dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis Idee: Zu zeigen, dass die Menge M aller $n \in \mathbb{N}$, für die $P(n)$ gilt, induktiv ist. Aber das dazu nötige steht genau in der Annahme über P. □

Bemerkung $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann $0 \in M$ und $(n \in M \Rightarrow n+1 \in M)$ impliziert $\mathbb{N}_0 \subset M$, da M induktiv und also $\mathbb{N} \subset M$, Also wenn P mathematische Aussage, so dass: $P(0)$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$, dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.47. *Wir wollen beweisen, dass*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) := 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2,$$

(die genaue Definition des Summensymbols ist in der nachfolgenden Def 2.48 gegeben.)

Zum Beweis bezeichnen wir als $P(n)$ die Aussage, dass für $n \in \mathbb{N}$ die (zweite) Gleichheit in der obigen Formel gilt. Dann ist $P(1)$ wahr, da $1 = 1^2$. Möge nun $P(n)$ gelten, also $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n$ wahr sein, dies bezeichnen wir als (IA), Induktionsannahme. Dann erhalten wir, wie verlangt,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \overset{(IA)}{=} n^2 + (2n+2-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

Also impliziert $P(n)$ immer $P(n+1)$; nach dem Induktionsprinzip gilt $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen.

Definition 2.48. Summen-und Produktsymbol *Für $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir*

$$\sum_{k=n}^{n-1} a_k = 0 \text{ (leere Summe)} \,, \forall m \geq n-1 : \sum_{k=n}^{m+1} a_k = \left(\sum_{k=n}^{m} a_k\right) + a_{m+1}$$

$$\prod_{k=n}^{n-1} a_k = 1 \text{ (leeres Produkt)} \,, \forall m \geq n-1 : \prod_{k=n}^{m+1} a_k = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right) \cdot a_{m+1}$$

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \text{ Potenz } \quad (a^0 = 1 \text{ wenn } a \neq 0), n! = \prod_{k=1}^{n} k, \text{ Fakultät } \quad (0! = 1)$$

Satz 2.49. *Bernoullische Ungleichung: $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1+nx$. Überdies gilt*

$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}$ *wenn* $n \geq 2 (= 1+1)$ *und* $(x \geq -1 \;\&\; x \neq 0)$ *dann* $(1+x)^n > 1+nx$.

Beweis Idee: Induktion in n.

Proposition 2.50. *Für $n \in N$ sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dann $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.*

Beweis Idee: zB $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ mit Bernoullischer Ungleichung beweisen, die Rechnung wird einfacher wenn wir $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n \geq 2$ betrachten.

Definition 2.51. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist der Binominalkoeffizient definiert durch*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}\right) & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{wenn } k > n. \end{cases}$$

$$\text{z.B. } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n \text{ wenn } n > 0, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, 0 \leq k \leq n.$$

Lemma 2.52.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis Wenn $k > n$ (also $k = n+1 \vee k > n+1$) Definition direkt nutzen, sonst Bruchrechnung.

Satz 2.53. Binominalsatz *Mit der Vereinbarung $0^0 = 1$ gilt*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}_0 \; : \; (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis Idee: Induktion in n unter Benutzung von Lemma 2.52..

Obwohl wir $\mathbb{N}$ über die Eigenschaft der induktive Menge definiert haben, erlaubt es als Zahlenbereich, die Rechenoperationen, wie aus der Elementarmathematik gewohnt, auszuführen. Dies können wir, wie zu erwarten, mit Induktion beweisen.

Lemma 2.54.

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \ n + m \in \mathbb{N} \ \& \ n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Idee – mit Induktion, zuerst für beliebiges aber fixes m Induktion in n machen für die Addition, beruht auf Axiom (AA). Dies nutzen wir dann, um wieder für beliebiges aber fixes m Induktion in n für die Multiplikation zu machen.

Lemma 2.55.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ n = 1 \ \textit{oder} \ (n > 1 \ \& \ n - 1 \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere ist $1 = \min \mathbb{N}$.

Beweis mit Induktion in n, in der Tat gilt bereits $\forall n \in \mathbb{N} : \ (n \geq 1 \Rightarrow P(n+1))$.

Satz 2.56.

$$\forall n \in \mathbb{N} \, \forall m \in \mathbb{N} : \quad n \leq m \ \textit{oder} \ n - m \in \mathbb{N}.$$

Beweis Idee: für fixes n Induktion in m, hierbei gegebenenfalls Lemma 2.55 für $k = n - m$ nutzen.

Wir haben also gezeigt: $n < m$ in $\mathbb{N} \Rightarrow n \leq m - 1$, denn $m - n \in \mathbb{N}$ also $m - n \geq 1$.

Definition 2.57. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ *sind die ganzen Zahlen.*

Es gilt, wegen Satz 2.56, dass $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{n - m \,:\, n, n \in \mathbb{N}\}$, insbesondere $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Korollar 2.58. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

Beweis Idee: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ Terme in Summe oder Produkt nach Vorzeichen umordnen.

Definition 2.59. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z} \;\&\; q \in \mathbb{N}\}$ *sind die rationalen Zahlen. Also* $q \neq 0$*!*

Klarerweise $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, nutze $q = 1$.

Bemerkung 2.60. $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ *mit* $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ *erfüllt die 9 Körperaxiome und die 3 Anordungsaxiome, dies lässt sich einfach überprüfen*

(1) *da* $\frac{p}{q}\frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$ *und* $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn+qm}{qn}$*, führen die Operation* $+, \cdot$ *von* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *nach* $\mathbb{Q}$ *zurück*

(2) $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$ *und* $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{q}{p}$ *für* $p > 0$, $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{-q}{-p}$ *für* $p < 0$ *zeigt die Existenz der Inversen in* $\mathbb{Q}$.

Starke Induktion

Satz 2.61. Wohlordnung der natürlichen Zahlen *Sei* $M \subset \mathbb{N}$ *nichtleer, dann existiert* $\min M$*.*

Beweis Idee – Mit Induktion, dh. Korollar 2.46 zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : ((\exists m \in M \subset \mathbb{N} \,\&\, m \leq n) \Rightarrow \exists \min M).$$

Korollar 2.62. Starkes Induktionsprinzip *Sei* P *eine mathematische Aussage, so dass* $P(1)$ *und* $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow P(k)) \Rightarrow P(n+1)$*. Dann gilt* $P(n)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$*.*

Beweis Idee: Betrachte $M = \{n \in \mathbb{N} \,:\, P(n) \text{ falsch }\}$, falls $M \neq \emptyset$ gibt es wegen $1 \notin M$ gibt es einen Widerspruch für $n = \min(M) - 1$.

Bemerkungen

- auch als Prinzip der "least criminals" bekannt, eine gute Übersetzung wäre: die kleinsten/ersten "Bösewichte" im Sinne von minimalen Gegenbeispielen. Es ist oftmals einfacher, die Existenz solcher als die Existenz allgemeiner Gegenbeispiele auszuschliessen.
- warum *starkes* Induktionsprinzip genannt: Um das entscheidende $P(n+1)$ zu beweisen, können wir nunmehr $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ voraussetzen. Bisher konnten wir nur $P(n)$ annehmen und also haben wir nun eine "stärkere" Beweismethode, die es erlaubt, mehr und "stärkere" Aussagen zu beweisen.

- eine einfacherer Formulierung, die allerdings von der bekannten Formulierung $\Rightarrow$ $P(n+1)$ abweicht ist Folgende. Sei P eine mathematisches Aussagenprädikat, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ gilt, falls $\forall k \in \mathbb{N} : k < n \Rightarrow P(k)$. Dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (In dieser Formulierung ist zB versteckt, dass $P(1)$ gilt, da es kein $k < 1$ in $\mathbb{N}$ gibt.)

Definition 2.63. *Wir sagen p ist Primzahl, wenn $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ und*
$$(p = n \cdot m, \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n = 1 \text{ oder } m = 1)).$$
Behauptung: *Jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ ist Produkt (eventuell einfaktorieles) endlich vieler Primzahlen. (Die Eindeutigkeit der Produktdarstellung ist viel tiefliegender! Siehe eventuell DS)*

Beweis: Mit starker Induktion.

Lemma 2.64. $\forall n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$ *oder* $\exists l \in \mathbb{N} : n = 2l - 1)$*, und nur einer der Fälle tritt ein.*

Beweis: Induktion, Widerspruch zu $1 = \min \mathbb{N}$ für Eindeutigkeit des Falles nutzen.

Satz 2.65. *(Der Klassiker) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. die Diagonale im Einheitsquadrat ist irrational.*

Beweis: Idee: Mit $\lightning$, betrachte eine Bruchdarstellung mit kleinstem Nenner.

Rational versus Reell

Weil nicht alle reellen Zahlen rational sind, müssen wir das Verhältnis von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ studieren. Wir beginnen mit der folgenden Aussage, die auf Archimedes zurückgeführt wird, obwohl er Eudoxos von Knidos als Urheber erwähnt. Die Bezeichnung "Axiom" ist zwar in der Literatur aus historischen Gründen üblich, in der Theorie der reellen Zahlen jedoch unbegründet, da es sich hier um eine Konsequenz aus unseren 13 Axiomen handelt.

Satz 2.66. (Archimedisches "Axiom") *Die Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen ist in* $\mathbb{R}$ *nicht von oben beschränkt.*

Beweis: Idee: Mit $\lightning$, betrachte dazu $\sup \mathbb{N}$ und Approximationsprinzip.

Korollar 2.67. (Eudoxos) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Beweis: Idee: folgt direkt aus dem Archimedischen Axiom.

Nunmehr können wir zeigen, dass obwohl nicht alle Zahlen rational sind, die rationalen Zahlen zumindest alle Zahlen gut annähern können.

Satz 2.68. (Rationale Zahlen sind dicht) *Für alle* $x < y$ *reell existiert* $z \in \mathbb{Q}$*, die* $x < z < y$ *erfüllt.*

Beweis: Idee: Erst nach $\mathbb{R}_+$ verschieben. Nun führen kleine Schritte zum Ziel!

Die komplexen Zahlen

Als letzten Körper führen wir die komplexen Zahlen ein, in diesem Körper ist die in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung $x^2 + 1 = 0$ leicht lösbar.

Definition 2.69. *Wir betrachten* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *mit den Operationen*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Dann ist $\mathbb{C}$ ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ (neutral für "+") und Einselement $(1, 0)$ (neutral für "$\cdot$").

Bemerkung 2.70.

- *nur die Axiome (MA), (MK) und (DG) erfordern etwas Arbeit*
- *für* $(a, b) \neq (0, 0)$ *ist* $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ *das mulitiplikative Inverse !!*
- $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$*, d.h.* $x \to (x, 0)$ *gibt* $\mathbb{R}$ *als Unterkörper von* $\mathbb{C}$ *- wir haben* $x + y \to (x, 0) + (y, 0)$ *und* $x \cdot y \to (x, 0) \cdot (y, 0)$
- $(0, 1)^2 = (-1, 0)$**!!** *Wir schreiben* i *für* $(0, 1)$ *und* $a + bi$ *für* (a, b) *Somit* $i^2 = -1$ *und* $\mathbb{C}$ *kann* nicht *angeordnet werden, d.h. es gibt kein* $\mathbb{P} \subset \mathbb{C}$*, das (O.1), (O.2) und (O.3) erfüllt.*
- **WICHTIG:** *wenn es schwer fällt, sich die Multiplikationsregeln zu merken/zu verstehen, dann kann man sie sich wie folgt herleiten. Da* $(0, 1)$ *dem neuen Element* i *mit* $i^2 = -1$ *entsprechen soll und alle Körpergesetze gelten sollen, erhalten wir mit* $(a, b) = a + bi$ *und* $(c, d) = c + di$ *sofort*

$$(a+bi)(c+di) = a(c+di) + bi(c+di) = ac + adi + bic + bidi = (ac + (-1)bd) + (ad + bc)i,$$

also die obige Definition der Multiplikation. Die Additionsregel ist auch klar, wenn wir die Terme in $(a + bi) + (c + di)$ *nach reellen Zahlen und solchem mit Faktor* i *umsortierten.*

Schließlich ergibt sich auch die Regel für die Inverse durch eine clevere Erweiterung des Bruches im Geiste der zweiten Binomischen Formel. Der Erweiterungsfaktor ist die komplexe Konjugierte des Nenners, ein zentraler Begriff - siehe die nachfolgende Def 2.71.

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi) \cdot (a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - (-b^2) + (ba + a(-b))i} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i,$$

da der Nenner ja nun eine reelle Zahl ist.

Nochmals wichtig: Das dies tatsächlich die Inverse ist, muss noch überprüft werden, um einen Zirkelschluss zu vermeiden- wir wissen ja erst, dass wir in einem Körper sind, wenn die Inverse gesichert existiert.

Definition 2.71. *Für* $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{C}$ *definieren wir*

$$Re(z) = a, Im(z) = b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ Realteil, Imaginärteil und Betrag von } z$$

sowie

$$\bar{z} = a - bi \text{ die zu } z \text{ komplex konjugierte Zahl.}$$

Wie in $\mathbb{R}$ ist $|z|$ der Abstand von z zum Ursprung ($\mathbb{C}$ wird mit der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert und die Formel für die Länge folgt aus dem Satz von Pythagoras).

Lemma 2.72. $\forall z, w \in \mathbb{C}$
a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *!*
b) $\overline{\overline{z}} = z, |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |\overline{z}|, Re(z) = (z + \overline{z})/2, Im(z) = (z - \overline{z})/2i.$

Beweis: Zweite Teilbehauptung von a) (und b)) ist in der Tat eine angenehme Überraschung und entscheidend für die Eleganz der Theorie.

Satz 2.73. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$
a) $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$ *und* $|Re(z)| = |z| \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
b) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *(wie in* $\mathbb{R}$*)*
c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ *Multiplikativität* *(wie in* $\mathbb{R}$*)*
d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ Δ*-Ungleichung* *(wie in* $\mathbb{R}$*, aber andere Beweisidee)*

Beweis:

Proposition 2.74. Komplexe Quadratwurzeln *Für gegebenes* $c \in \mathbb{C}$ *suchen wir* alle *(da kein "Positives" ausgezeichnet ist)* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $w^2 = c$.

Hierbei $w^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$, *und wenn* $c \neq 0$ *dann ist*

$$w_1 = \sqrt{\frac{|c| + Re(c)}{2}} + \sigma\sqrt{\frac{|c| - Re(c)}{2}}i \text{ wo } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } Im(c) \geq 0 \\ -1 & \text{für } Im(c) < 0 \end{cases}$$

eine Lösung, die einzige andere Lösung ist $w_2 = -w_1$.

$$0 = z^2 + pz + q = (z + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p^2}{4} - q) = (z + \frac{p}{2} + w)(z + \frac{p}{2} - w)$$

wobei $w^2 = \frac{p^2}{4} - q$ *kann somit in* $\mathbb{C}$ *gelöst werden.*

Beweis: Idee wenn $c = a + bi$ gegeben und das gesuchte $w = u + vi$ ist, dann

$$w^2 = c \Leftrightarrow (u^2 - v^2 = a \quad \& \quad 2uv = b)$$

.

Das Gleichungssystem für u und v kann durch Substitution wie $v = \frac{b}{2u}$ mit den Fallunterscheidungen und entsprechender Ausdauer gelöst werden. Eleganter ist jedoch eine weitere Gleichung ins Feld zu führen, da $c = w^2$ folgt aus 2.73.c)

$|c| = |w|^2 = u^2 + v^2$, also $|c| + a = (u^2 + v^2) + (u^2 - v^2) = 2u^2$ und analog $v^2 = |c| - a$.

Für die erste Lösung w_1 wählen wir den Realteil u nichtnegativ, $\sigma = \text{sig}(b) = \text{sig}(v)$ stellt dann sicher, dass nicht nur $4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2)^2 = |c|^2 - a^2 = b^2$ sondern auch tatsächlich $2uv = b$.

Die zweite Lösung ist dann, gemäß der Beweisideen von Beispiel 2.11, $w_2 = -w_1$.

Im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion und der Eulerschen Formel werden wir bald einen geometrischeren Zugang zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ finden, der diese als Ebene und die Rechenoperationen als geometrische Verschiebungen und Drehstreckungen interpretiert. Wir können allerdings bereits jetzt erste geometrische Schrittchen machen.

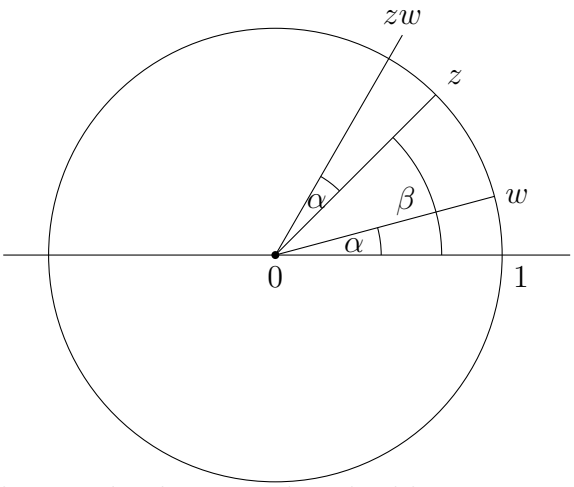
Beispiel 2.75. *Gleichung eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $m \in \mathbb{C}$*

$R^2 = |z-m|^2 = (z-m)(\overline{z-m})dh\ z\bar{z}-\bar{m}z-m\bar{z}+m\bar{m}$ *d.h.* $z\bar{z}-\bar{m}z-m\bar{z}+(|m|^2-R^2) = 0.$

Beispiel 2.76. *Die Mittelsenkrechte: zu bestimmen ist die Menge der Punkte, die gleichen Abstand zu i und $-i$ haben (eine schwierigere Variante ist auf dem Übungszettel)*

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 \right\}.$$

Beispiel 2.77. *Multiplikation und (Streck)Drehung.*
Seien u, v, w die Eckpunkte eines Dreiecks Δ in $\mathbb{C}$. Wenn $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und wir das durch Multiplikation mit z entstandene Dreieck $\hat{\Delta}$, das nun die Ecken $\hat{u} = z \cdot u, \hat{v} = z \cdot v$ und $\hat{w} = z \cdot w$ hat, betrachten, dann sehen wir, dass beide Dreiecke die gleichen Seitenlängen haben, zb $|\hat{w} - \hat{u}| = |(w-u)z| = |w-u||z| = |w-u|$. Wenn wir insbesondere $u = 0, v = 1$ und w vom Betrag wählen, dann sehen wir im nebenstehenden Bild, dass die Winkel $\angle w, 0, 1$ und $\angle zw, 0, z$ gleichgroß sind, bei der Multiplikation von komplexen Zahlen vom Betrag eins addieren sich also deren Argumente (dh die Winkel zwischen ihnen und der positiven x-Achse). Im Unkehrschluss lassen sich nun hohe Potenzen solcher Zahlen leicht finden, indem wir die entsprechenden Winkel einfach vervielfachen. Ebenso können wir ein u mit $u^2 = w$ finden indem wir $\angle w, 0, 1$ halbieren.



Da jedes $z \in \mathbb{C}$ als $|z| \cdot d$ mit $|d| = 1$ geschrieben werden kann, und Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl alle Vektoren nur streckt, ist die Multiplikation mit allgemeinem z eine Drehungstreckung der Ebene um das zu d gehörige Argument und den Faktor $|z|$.

3. Folgen und Reihen

Definition 3.1. *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *in* $\mathbb{R}$ *(in* $\mathbb{C}$*,*M*) ist eine Abbildung* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n$ *(*$n \mapsto z_n \in \mathbb{C}$*,* $n \mapsto x_n \in M$*), dh. jedem* $n \in \mathbb{N}$ *ist ein Folgenglied* a_n *(*z_n, x_n*) zugeordnet.*

Wir formulieren die nächsten Resultat bis Satz 3.12 für allgemeinere komplexe Folgen, die Beweise sind dadurch nicht komplizierter als für reelle Folgen, die Allgemeinheit aber später von Nutzen. Wer will kann sich jedoch zuerst reelle Folgen vorstellen, unsere Beispiele werden dies überwiegend auch sein. Wenn wir dann Grenzwerte von Ungleichungen und monotone Folgen betrachten, sind diese aber reell.

Definition 3.2. *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *Folge in* $\mathbb{C}$*. Wir sagen,* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *hat* Grenzwert $z \in \mathbb{C}$ *wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon.$$

Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert hat, sonst divergent.

Bemerkung
a) die Annahme, dass $N = (N_\varepsilon) \in \mathbb{N}$, also eine natürliche Zahl ist, ist nicht wirklich notwendig und wird im Folgenden ausgelassen, auch wenn sie in der Literatur sehr oft gemacht wird. In der Tat, wenn für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ $\exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$, dann gibt es nach dem Archimedes' Axiom 2.66 ein $\hat{N} \in \mathbb{N}$ mit $\hat{N} > N$ und also $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \hat{N} \Rightarrow n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$.
b) die analoge Definition wird benutzt für den reellen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, da $|a_n - a|_{\mathbb{R}} = |a_n - a|_{\mathbb{C}}$, konvergieren reelle konvergente Folgen auch in $\mathbb{C}$.

Satz 3.3. *Jede konvergente Folge hat* genau *einen Grenzwert.*

Beweis: Idee: Dreiecksungleichung benutzen, Abstand zwischen zwei (potentiellen) GWen ist "beliebig klein".

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder auch ($z_n \to z$ für $n \to \infty$) wenn $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ Grenzwert z hat.

Definition 3.4. *Eine Folge ist* Nullfolge (**NF**) *wenn* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Beispiel 3.5. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,. *siehe Eudoxos 2.67.*

b) *Wenn* $|z| < 1$ *dann* $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, *siehe a) und Bernoullis Ungleichung 2.49.*

Definition 3.6. $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *ist eine beschränkte Folge wenn* $\exists M\, \forall n \geq 1 : |z_n| \leq M$, *d.h. es gibt einen Kreis, der die gesamte Folge enthält.*

Proposition 3.7. a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

b) *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *Nullfolge und* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt, dann ist* $(z_n u_n)_{n=1}^{\infty}$ *wieder Nullfolge*

Beweis:

Lemma 3.8. a) *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine komplexe Folge und* $z \in \mathbb{C}$, *dann*

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow (z - z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|z - z_n|)_{n=1}^{\infty} \text{ reelle Nullfolge.}$$

b) *Wenn* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *Nullfolgen sind, dann ist* $(z_n + u_n)_{n=1}^{\infty}$ *auch eine Nullfolge.*

Beweis:

Korollar 3.9. Algebra für Grenzwerte *Seien* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{C}$

a) $\forall \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty}(z_n + \alpha w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \alpha \lim_{n\to\infty} w_n$ *($\alpha = \pm 1$ wichtige Fälle)*

b) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$

c) *Wenn* $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ *dann gibt es* $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : z_n \neq 0$, *und* $(z_n^{-1})_{n=N}^{\infty}$ *hat Grenzwert* $(\lim_{n\to\infty} z_n)^{-1}$

Beweis:

Beispiel 3.10. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+23}{n^2+2026n+42} = 2$

b) *Wenn* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$ *dann* $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ *und* $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} n^k z^n = 0$

Beweis: Idee– in b) zeigen $|n^k z^n| \leq C_k(\frac{1+|z|}{2})^n$ für große n.

Konvergenz in $\mathbb{C}$ kann auf Konvergenz reeller Folgen zurückgeführt werden:

Proposition 3.11. *Sei* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine komplexe Folge.*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \Leftrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z)$ & $\lim\limits_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(z))$.

b) *wenn* $z_n \in \mathbb{R}$ *für alle* n, *und* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ *dann* $z \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Somit hat eine reelle Folge einen Grenzwert im Reellen genau dann wenn sie einen Grenzwert im Komplexen hat. Vergleiche mit der Situation bzgl. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$!

Nun zum Zusammenhang von Konvergenz und Ungleichungen.

Satz 3.12. *Möge* $a_n \to a, b_n \to b$ *für* $n \to \infty$ *und seien alle* a_n, b_n.

a) *Wenn* $a_n \leq b_n$ *für alle* n, *dann* $a \leq b$.

b) Sandwichprinzip *Wenn* $(c_n)_1^{\infty}$ *Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $\forall n : a_n \leq c_n \leq b_n$ *und wenn* $a = b$ *dann* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Beweis:

Für Konvergenz in $\mathbb{R}$ gibt es sehr allgemeine und nützliche Kriterien.

Definition 3.13. *Wir sagen eine Folge $(a_n)_n^\infty$ ist monoton wachsend (fallend) wenn*

$$\forall n < m : a_n \leq a_m \ \ (a_n \geq a_m).$$

Induktion gibt: $(a_n)_n^\infty$ monoton wachsend (fallend) gdw. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \ \ (a_n \geq a_{n+1})$

Satz 3.14. Monotonie und Konvergenz *Sei $(a_n)_n^\infty$ eine beschränkte und monoton wachsende (fallende)* **reelle** *Folge. Dann ist $(a_n)_n^\infty$ konvergent mit Grenzwert $\sup_{n\geq 1} a_n$ ($\inf_{n\geq 1} a_n$).*

Beweis:

Beispiel 3.15. a) $e := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *Eulersche Zahl,* $2 < e < 3$,

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis: Für die erste Folge in a) siehe Prop 1.47, in b) kann man 2.10.b) nutzen.

Nicht alle (reellen) Folgen sind monoton, was können wir dann untersuchen?

Definition 3.16. *Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in M (beliebige Menge). Wenn $(n_k)_{k=1}^\infty$ eine strikt wachsende ($n_{k+1} > n_k$) Folge in $\mathbb{N}$ ist, dann ist $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, also $k \mapsto x_{(n_k)}$,eine Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^\infty$.*

Bemerkung Das strikte Wachstum erzwingt $n_k \geq k$, also erbt TF den $\lim_{n\to\infty} x_n$, falls der existiert, in der Tat werden wir im Folgenden nur nutzen dass für jede TF und jedes N ein K mit $k \geq K \Rightarrow n_k > N$ existiert.

Proposition 3.17. *Jede reelle Folge$(x_n)_{n=1}^\infty$ hat eine monotone Teilfolge!*

Beweis:–Idee n ist ein Aussichtspunkt wenn $\forall m > n : x_m < x_n$. Eine TF aus APen ist monoton fallend. Wenn es diese nicht gibt, gibt es eine monoton wachsende TF.

Es gilt: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist wiederum konvergent mit demselben Grenzwert. Jede Teilfolge einer Teilfolge ist auch Teilfolge der ursprünglichen Folge.

Satz 3.18. Bolzano-Weierstrass *Jede beschränkte (komplexe) Folge* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis–Idee: Mit 3.17 TF für Konvergenz der Realteile finden, falls es eine reelle Folge war dann fertig. Sonst in dieser TF eine weitere TF für Imaginärteile wählen.

Beispiel 3.19. Kettenbrüche

$$a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}.$$

Beweis:

Appendix A. Notationen

Wir werden die hier zusammengetragenen Begriffe und Symbole in der Vorlesung jeweils bei Bedarf einführen, dieses Kapitel dient also zur nochmaligen Übersicht.

Definition A.1. Menge *(intuitive Definition von G. Cantor)* ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft ("die mathematische Aussage $P(x)$ gilt") haben.

Wir schreiben $x \in M$ wenn x ein Element von M ist, d.h. zu M gehört, und $x \notin M$ andernfalls.

Typischerweise studieren wir $\{x \in X \,:\, P(x)\}$, d.h. die Menge aller x aus einer (grossen fixen "Universal-")Menge X, für die die (mathematische) Aussage $P(x)$ wahr ist.

Wir sagen M ist Teilmenge von N (Notation $M \subset N$), wenn alle Elemente von M auch zu N gehören, zwei Mengen sind gleich wenn sie genau die gleichen Elemente haben. (Statt M Teilmenge von N sagen wir oft M ist kleiner(oder auch kleiner gleich) N). Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist $M \subset N$ gleichbedeutend mit $N \supset M$. wir schreiben $M \subsetneq N$ wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ und sagen M ist *strikt* kleiner als N.

Aus gegebenen Mengen M, N konstruieren wir

- $M \cap N = \{x \,:\, x \in M \;\&\; x \in N\}$ Schnittmenge, Durchschnitt von M und N
- $M \cup N = \{x \,:\, x \in M \text{ oder } x \in N\}$ Vereinigung
- $M \setminus N = \{x \,:\, x \in M \;\&\; x \notin N\}$ Differenzmenge
- $M \times N = \{(x, y) \,:\, x \in M \;\&\; y \in N\}$ Produktmenge, wobei $(x, y) = (x', y')$ genau dann wenn $x = x'$ und $y = y'$ - geordnete Paare. Man kann diese auch als Mengen darstellen, zB. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
- $\mathfrak{P}(M) = \{N \,:\, N \subset M\}$ die Potenzmenge von M

Spezielle Notation ist reserviert für

- $\emptyset$ leere Menge, enthält *kein* Element
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2 - 1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,:\, m \in \mathbb{Z} \;\&\; n \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen

Warnung: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$!

Ausserdem bezeichnen wir Intervalle von ganzen oder reellen Zahlen durch die üblichen Notationen (die später flexibler gehandhabt werden):

- $\{k, \dots, m\} = \{l \in \mathbb{Z} \,:\, k \leq l \leq m\}$ wenn $k, m \in \mathbb{Z}$, das ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ wenn $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k \in \mathbb{N}$,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall für $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$ offenes Intervall für $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei wir $\pm\infty$ nicht als Teil des (algebraischen) Körpers $\mathbb{R}$ betrachten können, aber annehmen, dass $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, -\infty < x < \infty$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$ rechts offenes (halboffenes) Intervall für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links offenes (halboffenes) Intervall für $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Definition A.2. Quantoren Wir benutzen die Abkürzungen

- $\forall x \ldots$ bedeutet "für alle x gilt $\ldots$"
- $\exists x \ldots$ bedeutet "es gibt ein x so dass $\ldots$"

Weitere (logische (Junktoren) und andere) Symbole:

- $\&$ für "und"
- $\Rightarrow$ für "impliziert" und auch $\curvearrowright$ im sehr ähnlichen Sinne von "also"
- $\Leftrightarrow$ für "genau dann wenn"
- $\lightning$für "Widerspruch" (erzielt)
- # für Kardinalität, dh. Anzahl der Elemente einer Menge
- $\smiley$,$\square$ für q.e.d, d.h. Beweis beendet
-  für Warnung

Eine Abbildung F bildet eine Menge X in eine Menge Y ab, wenn

$$F \subset M \times N, \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in F \text{ und } \forall (x, y), (x, y') \in F : y = y'.$$

Wenn $(x, y) \in F$ dann schreiben wir $y = F(x)$. Wir identifizieren also die Abbildung $F = \{(x, F(x)) \ : \ x \in X\}$ mit ihrem "Graphen". Wenn $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) nennen wir F oftmals Funktion und benutzen gerne kleine Buchstaben $f, g, h, \ldots$.

Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt

- injektiv (auch $1-1$ genannt) wenn $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$,
- surjektiv (bildet *auf* Y ab, engl "onto") wenn $\forall y \in Y \exists x \in X : F(x) = y$,
- bijektiv wenn F injektiv und surjektiv ist.