

Kann die Statistik Fälschungen aufdecken?

Ein Unterrichtseinstieg in die beurteilende Statistik.

Steffen Hintze

Mathematisches Institut der Universität Leipzig

19.02.2018

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

- Gegenstand der beurteilenden Statistik anhand vielfältiger Anwendungssituationen erläutern
- mithilfe von Simulationen Eigenschaften von Stichproben erkunden
- ...

Jede Schülerinnen und jeder Schüler fälscht eine Serie von 50 Münzwürfen. Danach wird geprüft, ob die Statistik mit ihren Methoden in der Lage ist, die Fälschung anzuzeigen.

- 1 Überlegen Sie sich, worauf geachtet werden sollte, wenn eine Serie von 50 Münzwürfe so gut wie möglich gefälscht werden soll.
Methode: Think - Pair - Share
- 2 Tragen Sie auf dem Arbeitsblatt eine gefälschte Serie von 50 Münzwürfen ein. Fälschen Sie diese Serie so gut wie möglich.
Methode: Einzelarbeit
- 3 Tauschen Sie die Fälschungen aus.

erste Idee

Ich schaue mir die vorliegende Serie an und überlege mir, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass bei einem 50-fachen Münzwurf diese Serie erzeugt wird. Liegt diese Wahrscheinlichkeit unterhalb einer gewissen Grenze, dann nehme ich an, dass die Serie gefälscht ist.

erste Idee

Ich schaue mir die vorliegende Serie an und überlege mir, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass bei einem 50-fachen Münzwurf diese Serie erzeugt wird. Liegt diese Wahrscheinlichkeit unterhalb einer gewissen Grenze, dann nehme ich an, dass die Serie gefälscht ist.

Problem

- 1 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein 50-facher Münzwurf die vorliegende Serie erzeugt, ist für jede Serie gleich groß.
- 2 Wissenschaftliche Konventionen verlangen, dass zunächst die Regel für die Entscheidung festzulegen ist und erst danach die Daten betrachtet werden.

zweite Idee

Ich überlege mir eine Testgröße und lege für diese Testgröße einen inakzeptablen Bereich fest. Diesen inakzeptablen Bereich kann ich beispielsweise finden, in dem ich den 50-fachen Münzwurf häufig simuliere und darauf achte, welche Werte meine Testgröße NICHT annimmt.

Habe ich den inakzeptablen Bereich gefunden, werte ich die vorliegende Serie aus. Nimmt die Testgröße bei dieser Serie einen inakzeptablen Wert an, dann wird die Serie von mir als Fälschung markiert.

Anzahl der Köpfe (K)

Arbeitsauftrag:

Simulieren Sie den 50-fachen Münzwurf mit dem Computer und lassen Sie den Computer zählen, wie oft die Münze Kopf zeigte. Notieren Sie das Ergebnis und wiederholen Sie diesen Vorgang, bis Sie 20 Serien simuliert haben. Tragen Sie die Ergebnisse anschließend vorn ein.

Auswertung der gesammelten Daten:

Nach dem Skispung-Prinzip (Streichen der extremen 10% der Daten) wird ein akzeptabler Bereich gefunden und dadurch wird der inakzeptable Bereich festgelegt.

Anzahl der Pasche (KK bzw. ZZ)

Arbeitsauftrag:

Simulieren Sie den 50-fachen Münzwurf mit dem Computer. Lassen Sie den Computer zählen, wie oft ein Pasch auftrat und notieren Sie das Ergebnis. Wiederholen Sie diesen Vorgang, bis Sie 20 Serien simuliert haben. Tragen Sie die Ergebnisse anschließend vorn ein.

Auswertung der gesammelten Daten:

Nach dem Skipping-Prinzip (Streichen der extremen 10% der Daten) wird ein akzeptabler Bereich gefunden und dadurch wird der inakzeptable Bereich festgelegt

Anzahl der Podeste (KZK bzw. ZKZ)

Arbeitsauftrag:

Simulieren Sie den 50-fachen Münzwurf mit dem Computer. Lassen Sie den Computer zählen, wie oft ein Podest auftrat und notieren Sie das Ergebnis. Wiederholen Sie diesen Vorgang, bis Sie 20 Serien simuliert haben. Tragen Sie die Ergebnisse anschließend vorn ein.

Auswertung der gesammelten Daten:

Nach dem Skispung-Prinzip (Streichen der extremen 10% der Daten) wird ein akzeptabler Bereich gefunden und dadurch wird der inakzeptable Bereich festgelegt

Anzahl der Würfe, die notwendig sind, bis die Münze zehnmal Kopf zeigte

Arbeitsauftrag:

Simulieren Sie den 50-fachen Münzwurf mit dem Computer. Lassen Sie den Computer zählen, wie viele Würfe nötig waren, bis zum zehnten Mal Kopf gezeigt wurde. Notieren Sie das Ergebnis und wiederholen Sie diesen Vorgang, bis Sie 20 Serien simuliert haben. Tragen Sie die Ergebnisse anschließend vorn ein.

Auswertung der gesammelten Daten:

Nach dem Skispung-Prinzip (Streichen der extremen 10% der Daten) wird ein akzeptabler Bereich gefunden und dadurch wird der inakzeptable Bereich festgelegt

Bei den hier vorgestellten Verfahren können beim Schlussfolgern zwei Fehler auftreten:

- ① Eine gefälschte Serie wird nicht als gefälschte Serie erkannt.
- ② Eine echte Serie wird als gefälschte Serie markiert.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten dieser Fehler kann ich zwar durch meine Entscheidungsregel beeinflussen, aber ich kann sie nicht ausschließen.

Eigentlich wird mit den vorgestellten Verfahren überprüft, ob die vorliegende Serie durch den Wurf einer Laplace-Münze erzeugt wurde. Sprechen die Daten dagegen, kann jedoch nicht automatisch auf eine Fälschung geschlossen werden, denn die Münze könnte beispielsweise keine Laplace-Münze gewesen sein oder die einzelnen Münzwürfe wurden immer ähnlich ausgeführt.

Kurzum: Die Schlussfolgerung, dass die Serie gefälscht ist, funktioniert nur im vorliegenden Modell. Das Verfahren kann somit im günstigsten Fall nur Anhaltspunkte dafür liefern, dass die Serie nicht durch den Wurf einer Laplace-Münze erzeugt wurde.

Büchter, Andreas und Henn, Hans-Wolfgang (2007). Elementare Stochastik: eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Zweite, überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer.