Einführung in die Auflösung der Singularitäten

B. Herzog
Leipzig Wintersemester 2013/2014

Do. 13.15-14.45 SG 1-11
Fr. 09.15-10.45 SG 1-11

Bezeichnungen

$V(f_1,\ldots, f_m)$	Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome f_i im affinen oder projektiven Raum, vgl. die Einführung.
Sing(X)	Menge singulären Punkte der algebraischen Menge X.

Einführung

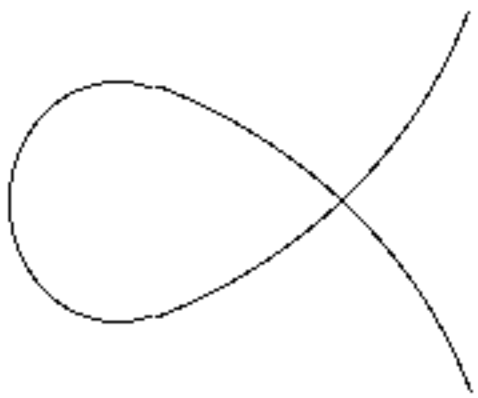
Singularitäten treten in der Mathematik in vielen Situationen auf und sind ein Synonym für zu erwartetende Schwierigkeiten.

Beispiele für Singularitäten

Zum Beispiel besitzen die Lösungsmengen nicht-linearer polynomialer Gleichungssyteme Singularitäten:

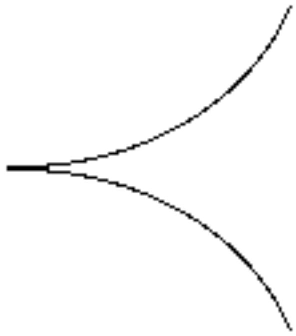
Die ebene Kurve mit der Gleichung

$y^2 = x^2 + x^3$



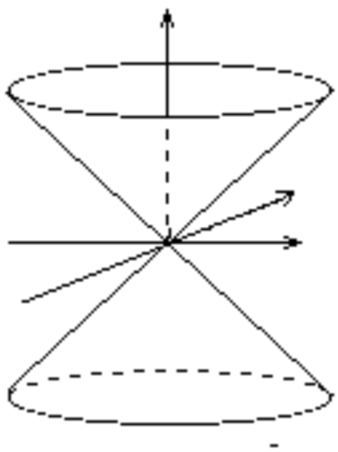
hat einen singulären Punkt im Ursprung, d.h. sie sieht dort lokal nicht so aus wie eine Gerade (ist dort keine Mannigfaltigkeit).

Die ebene Kurve mit der Gleichung
$y^2 = x^2 + x^3$

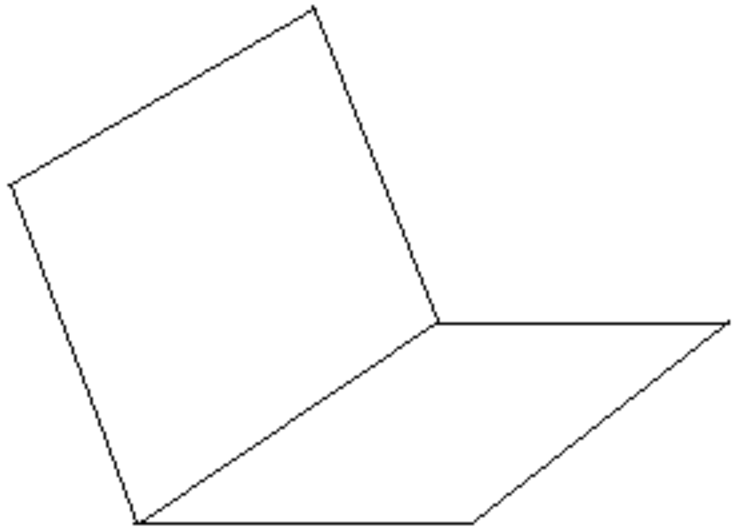


sieht zwar als topologischer Raum auch im Ursprung aus wie eine Gerade, aus der Sicht der differenzierbaren Kategorie jedoch nicht (keine Umgebung des Ursprungs ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit).

Der Kegel im Raum mit der Gleichung
$x^2 + y^2 = z^2$



im Ursprung einen singulären Punkt, d.h. er hat in seiner Spitze nicht die Struktur eine Mannigfaltigkeit.
Ein Paar sich schneidender Ebenen



hat in keinen Punkt der gemeinsamen Schnittgeraden die Struktur einer Mannigfaltigkeit, d.h. jeder Punkt dieser Geraden ist ein singulärer Punkt. Man sagt in diesem Fall, der singuläre Ort ist eine Gerade.

Wir werden uns hier auf algebraische Singularitäten beschränken, d.h. wir betrachten Lösungsmengen

$$V(f_1,\ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$$

von polynomialen Gleichungssystemen

$$f_1(x_1, \ldots , x_n) = 0$$
$$\ldots$$
$$f_m(x_1,\ldots, x_n) = 0$$

wobei die f_i Polynome in $x_1,\ldots, x_n$ sind, die wir <u>affine algebraische Mengen</u> nennen werden. Außerdem werden wir <u>projektive algebraische Mengen</u> betrachten, d.h. Teilmengen $X \subseteq \mathbb{P}^n$ im projektiven Raum, die lokal wie affine algebraische Mengen aussehen, d.h. Mengen der Gestalt

$$V(F_1,\ldots,F_m) =^{1} \{[x_0,\ldots,x_n] \in \mathbb{P}^n \mid F_i(x_0,\ldots,x_n) = 0 \text{ für alle } i\}$$

---

[1] $\mathbb{P}^n$ bezeichne den n-dimensionalen projektiven Raum,

$$\mathbb{P}^n :=^{1} \{[x_0, \ldots , x_n] \mid (x_0, \ldots , x_n) \mathrel{!=} (0, \ldots , 0)\}.$$

Dabei schreiben wir $[x_0, \ldots , x_n]$ für den Punkt mit den projektiven Koordinaten $x_0, \ldots , x_n$, d.h. für die Gerade durch den Ursprung und $(x_0, \ldots , x_n)$ im affinen (n+1)-dimensionalen Raum $\mathbb{A}^{n+1}$. Zwei Punkte $[x_0, \ldots , x_n]$ und $[y_0, \ldots , y_n]$ des projektiven Raums sind also genau dann gleich, wenn die zugehörigen Punkte $(x_0, \ldots , x_n)$ und $(y_0, \ldots , y_n)$ des affinen Raums proportional sind.

Sehr häufig werden wir den $\mathbb{A}^n$ mit einer der Mengen

$$U_i := \{[x_0, \ldots , x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

identifizieren, und zwar vermittels der Abbildung

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow U_i, (x_1, \ldots , x_n) \mapsto (x_1,\ldots, x_{i-1}, 1, x_i , \ldots, x_n).$$

Ist eine algebraische Menge X die Vereinigung zweier echter algebraischer Teilmengen, sagen wir

$$X = X' \bigcup X'',$$

d.h. ist X eine reduzible algebraische Menge, so kann man die Untersuchung der Singularitäten von X meist auf die Untersuchung der Singularitäten von X' und X" zurückführen. Deshalb ist der Fall, daß X irreduzibel ist, d.h. nicht Vereinigung endlich vieler echter algebraischer Teilmengen, von besonderen Interesse. Man spricht in diesem Fall auch von algebraischen Varietäten statt von algebraischen Mengen.

Die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit den Singularitäten auftreten, beruhen darauf, daß wir über Mannigfaltigkeiten sehr viel wissen, über Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten jedoch ziemlich wenig.

Situationen in denen Bedarf für die Auflösung der Singularitäten besteht

Auf der anderen Seite hat sich herausgestellt, daß sich tiefliegende Probleme im Kontext von Mannigfaltigkeiten (ohne Singulariäten) lösen lassen, wenn man ganz bescheidene Kenntnisse besitzt über Mannigfaltigkeiten, die ein paar wenige ganz spezielle und nicht sehr schlimme Singularitäten besitzen.

Zum Beispiel hat sich herausgestellt, daß sich die Klassifikationtheorie für algebraische Flächen (d.h. für 2-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, die sich in einen projektiven Raum einbetten lassen), welche in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelt wurde, auf den Fall beliebiger Dimensionen verallgemeinern läßt, wenn man die sogenannten kanonischen Singulariäten versteht. Das sind Singularitäten, die in einzelnen Punkten konzentriert sind und den nicht-singulären Punkten sehr nahe stehen.

Sehr häufig ist man bei der Untersuchung nicht-singulärer affiner algebraischer Mengen $X \subseteq \mathbb{A}^n$ in der Situation, daß die Kompaktheit von X wünschenswert wäre. Man kann dann X kompaktifizieren, indem man zur Abschließung $\overline{X}$ im projektiven Raum übergeht. Diese Abschließung besitzt ziemlich meistens singuläre Punkte, und es wäre wünschenswert, $\overline{X}$ durch eine nicht-singuläre Menge zu ersetzen, und zwar so, daß dabei die ursprüngliche Menge X unverändert bleibt.

Gegenstand der Theorie

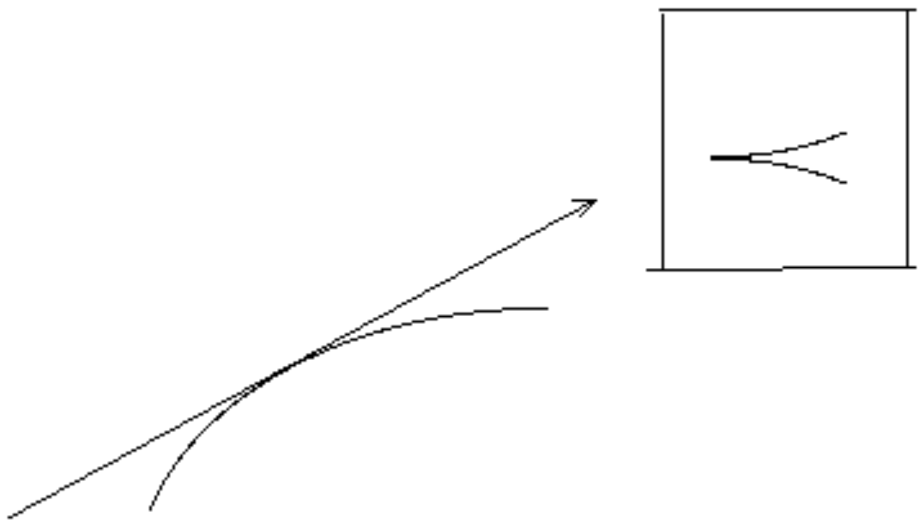
Es ist deshalb sehr naheliegend zu fragen, ob es eine Möglichkeit gibt, unsere Kenntnisse über nicht-singuläre Objekte zum Studium der singulären zu verwenden. Eine dieser Möglichkeiten bietet die Auflösung der Singularitäten. Diese Theorie versucht, die singulären Objekte so umzubauen, daß sie nicht-singulär werden.

Beispiele für die Auflösung der Singularitäten

Man beachte, der $\mathbb{P}^n$ bekommt so eine Überdeckung durch endlich viele affine Räume.

So kann man im ersten Beispiel der sich mit sich selbst schneidenden Kurve den einen Zweig der Kurve leicht anheben, so daß man eine nicht-singuläre Kurve im Raum entsteht, deren Projektion auf die Ebene gerade die gegebene Kurve ist.

Das zweite Beispiel der Semikubischen Parabel kann man sich ebenfalls entstanden denken durch Projektion einer einer nicht-singulären Raumkurve in einer Richtung, die im singulären Punkt tangential zur Kurve ist.



Wir werden sehen, daß ähnliche Konstruktionen auch für die höherdimensionalen Beispiele existieren.

Alle Konstruktionen sind dabei algebraischer Natur, d.h. die neu konstruierten Objekte werden wieder lokal durch polynomiale Gleichungen definiert sein, und die Abbildungen, welche die neuen mit den alten Objekten verbinden werden <u>rationale Abbildungen</u> sein. Das bedeutet, ihre Koodinatenfunktionen sind <u>rationale Funktionen</u>, d.h. lokal Quotienten von Polynomen.

Reduktion auf den projektive Fall

Bei allen nicht-trivialen Konstruktionen kommt dabei stets der <u>projektive Raum</u>

$$\mathbb{P}^n := \{[x_0, \dots , x_n] \mid (x_0, \dots , x_n) \neq (0, \dots , 0)\}$$

ins Spiel, d.h. auch wenn man mit affinen algebraischen Mengen startet, liegen die neuen Objekte im projektiven Raum. Andererseits entstehen aus projektiven algebraischen Mengen beim Auflösen der Singularitäten wieder projektive algebraische Mengen. Es ist deshalb naheliegend, die gegebenen affinen Mengen in einen projektiven Raum einzubetten, zur Abschließung überzugehen und dann nur noch projektive Mengen zu betrachten.

Die grundlegende klassische Frage zur Auflösung der Singulariäten lautet, ob Auflösung der Singularitäten immer möglich ist. Genauer:

Problem

Gibt es für jede projektive algebraische Menge X eine singularitätenfreie projektive algebraische Menge $\widetilde{X}$ derart, daß X und $\widetilde{X}$ eine gemeinsame offene Teilmenge U besitzen, die sowohl in X aus auch in $\widetilde{X}$ dicht liegt.

Bemerkungen

(i) Bei den topologischen Begriffen hat man die Zariski-Topologie im Auge. Im Fall von Kurven bedeutet 'dicht liegen' insbesondere, daß die Komplemente X-U und $\widetilde{X}$-U endlich sind.

(ii) Die Konstruktionen sollen über einem beliebigen Grundkörper stattfinden.

(iii) Von großem Interessen ist eine möglichst explizite Beschreibung des Prozeßes der Auflösung der Singularitäten, d.h. die Konstruktion der nicht-singulären Menge $\widetilde{X}$ aus der Menge X.

(iv) Im irreduziblen Fall kann man die Bedingung, daß die beiden Mengen X und $\widetilde{X}$ eine sehr große offene Menge gemeinsam haben sollen, mit Hilfe der auf diesen Mengen definierten rationalen Funktionen ausdrücken. Das kommt daher, daß im irreduziblen Fall zwei rationale Funktionen, die auf einer offenen Menge übereinstimmen, sogar überall übereinstimmen, wo sie beide definiert sind. Das hat zur Folge, die Körper der rationalen Funktionen von X und $\widetilde{X}$ gleich sind,

$$k(X) = k(\widetilde{X})$$

(dabei bezeichne k den Grundkörper von X). Das ist gleichbedeutend mit der Existenz zueinander inverser rationaler Abbildungen

$$f: X \dashrightarrow \widetilde{X} \text{ und } g: \widetilde{X} \dashrightarrow X.$$

Die gestrichelten Pfeile sollen darauf hinweisen, daß f und g nur auf einer offenen dichten Teilmenge von X bzw. $\widetilde{X}$ definiert sind, und 'invers' bedeutet, daß die Zusammensetzungen $f\circ g$ und $g\circ f$ überall dort, wo sie definiert sind, mit der identischen Abbildung übereinstimmen. Die algebraischen Varietäten bilden mit zusammen den rationalen Abbildungen eine Kategorie, die <u>birationale Kategorie</u>.

Die aktuelle Situation

Das Problem der Auflösund der Singularitäten ist nicht vollständig gelöst. Die beiden grundlegenden Ergebnisse sind die folgenden.

1. Die Auflösung der Singularitäten von algebraischen Varietäten über einem Körper der Charakteristik Null durch Aufblasungen.

Für jede algebraische Varietät X über einem Körper der Charakteristik 0 gibt es eine nicht-singuläre Varietät $\widetilde{X}$ und eine <u>reguläre Abbildung</u>[2]

$$\pi: \widetilde{X} \longrightarrow X,$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) π ist ein birationaler Isomorphismus, d.h. es gibt eine rationale Abbildung

$$\pi': X \dashrightarrow \widetilde{X}$$

[2] d.h. π ist überall definiert, die (lokal) definierten Koordinaten-Funktionen von π sind regulär, d.h. lokal durch Quotienten von Polynomen definiet, wobei die Nenner in allen Punkten des (lokalen) Definitionsbereichs ungleich Null sind.

welche in der birationalen Kategorie invers ist zu π.

(ii) Bezeichnet

$$S := \mathrm{Sing}(X)$$

die Menge der singulären Punkte von X, so induziert π einen Isomorphismus

$$\widetilde{X} - \pi^{-1}(X) \longrightarrow X - \mathrm{Sing}(X).$$

(iii) Die Abbildung π ist Zusammensetzung von endlich vielen Aufblasungen, deren Zentren nicht-singulär sind, ganz in Sing(X) liegen, und entlang derer X normal-flach sind.

Diese Satz von Hironaka ist wohl der am häufigsten angewandte Satz der algebraischen Geometrie.

Der Beweis findet sich in der Hironake-Arbeit [Hi1964]. Der Beweis ist zwar konstruktiv, aber eine so komplexe induktive Konstruktion, daß sie niemand wirklich durchschaut. Außerdem ist der beschriebene Auflösungsprozeß so uneffektiv, daß im konkreten Fall niemand in der beschriebenen Weise auflösen würde.

Die Frage nach einem nachvollziehbaren Auflösungsverfahren ist zwar in vielen konkreten Fällen beantwortet, im allgemeinen Fall aber noch völlig offen. Mit der Beantwortung der Frage nach einem akzeptablen Auflösungsverfahren verbindet sich die Hoffnung, die Auflösbarkeit der Singuläritäten auch in positiver Charakteristik beweisen zu können.

In positiver Charakteristik ist die Aufösbarkeit der Singularitäten bis zur Dimension 3 (durch Abhyankar) bewiesen, wenn man einige kleine Charakteristiken ausschließt.

Im Laufe der vergangenen Jahrzehnte ist der Beweis von Hironaka wesentlich vereinfacht worden und etwa auf eine Drittel der ursprünglichen Länge verkürzt worden.

Zum Teil gibt es vereinfachte Varianten des Beweises, die wesentlich voneinander verschieden sind, vgl. zum Beispiel [Ko2007] und [Hau2003].

Schließlich sei noch auf eine kombinatorische Beschreibung des Problems hingewiesen: es gib die Beschreibung eines polyedralen Spiels mit der Eigeschaft, daß eine Gewinnstrategie die Auflösbarkeit der Singularitäten in beliebiger Charakteristik zur Folge hätte (vgl. die Einleitung in [Hau2003]).

2. Die Auflösung der Singularitäten nach de Jong

Wenn man die Bedingungen an den Morphismus π im Satz von Hironaka abschwächt und zusätzlich zu den Aufblasungen noch endliche reguläre Abbildungen zuläßt, so kann man den Satz für beliebige Charakteristiken beweisen.

Die Varietät $\widetilde{X}$ ist dann aber nicht mehr birational äquivalent zu X: eine dichte offene Menge von X besitzt dann nur noch eine endliche Überlagerung, die dicht und offen in $\widetilde{X}$ liegt. Der Satz von de Jong ist in vielen Fällen ein brauchbarer Ersatz für die fehlende Auflösbarkeitsassage in positiver Charakteristik.

Der Beweis ist ein völlig anderer als der von Hironaka, vgl. [Ber1997], verwendet aber die wichtigsten von Hironake eingeführten Begriffe.

Zum Verlauf der Vorlesung
Wir werden damit beginnen, die zentralen Begriffe, die in der Arbeit von Hironaka eine Rollen spielen einzuführen und an Beispielen zu erläutern.

Das gilt insbesondere für den Begriff der Aufblasung.

Dabei wird es vor allem darum gehen, geometrisch naheliegende Konstruktionen in eine hinreichend allgemeine Sprache zu übersetzen: in die Sprache der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie: genauer die der Schemata und kohärenten Garben.

Die dabei auftretenden Begriffe und Konstruktionen mögen auf den ersten Blick kompliziert , ja monstös wirken, wenn man jedoch den anschaulichen Hintergrund im Auge behält von dem sie kommen, stellen sie das ideale Mittel dar, mit dem an bei Bedarf jederzeit zwischen der globalen Anschauung, lokalen geometrischen Betrachtungen und technischen Berechnungen hin- und herzuwechsen.

Ich werde dabei nicht alles beweisen, sondern bei Aussage, die sich nicht ausschließlich auf die Auflösung der Singularitäten beziehen auf die entsprechenden Standard-Lehrbücher (d.h. im allgemeinen auf [Mat1970] und [Har1977]) verweiesen.

Die eingeführen Begriffe sollen dann verwendet werden, die Auflösbarkeit der Singularitäten zunächst für Kurven zu beweisen. Dabei werden ich mich im wesentlichen an der Arbeit von Bennett [Ben1970] orientieren, die meiner Meinung nach einfachste Beschreibung der Situation im Kurven-Fall.

Danach werden wir uns der Auflösung von Flächen-Singularitäten zu wenden. Bereits im Flächenfalls gibt es wesentlich unterschiedliche Auflösungsverfahren. Zwei davon sollen beschrieben werden. Wir orientieren uns dabei an der Monographie von Cossart, Giraud und Orbanz [CGO1984]

Anschließend sollen anhand von Beispielen die Schwierigkeiten beschrieben werden, die in höheren Dimensionen auftreten.

Kollar ? Hauser ?

1. Aufblasungen

1.1 Aufblasung eines Punktes der affinen Ebene

Wir versehen den affinen Raum $\mathbb{A}^n$ und den projektiven Raum P^{N-1} mit den affinen bzw. projektiven Koordinaten x_i bzw. y_j ,

$$x = (x_1,...,x_N) \in \mathbb{A}^N$$

$$y = [y_1,...,y_N] \in \mathbb{P}^{N-1}$$

und betrachten die abgeschlossene Teilvarietät

$$\prod := \{(x,y)\in\mathbb{A}^N\times\mathbb{P}^{N-1} \mid x_iy_j - y_ix_j = 0 \text{ für } i,j = 1,...,N\}.$$

Die Einschränkung

$$\pi:\prod \to \mathbb{A}^N, (x,y) \mapsto x,$$

der Projektion auf den ersten Faktor heißt <u>Aufblasung</u> des $\mathbb{A}^N$ im Ursprung

$$\xi := (0,...,0)$$

oder auch (in älterer Terminologie σ-Prozeß oder monoidale Transformation) und man schreibt auch[3]

$$\mathrm{Bl}_\xi(\mathbb{A}^N) := \prod.$$

Der Punkt ξ heißt Zentrum der Aufblasung.

Bemerkungen

(i) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{A}^N$, welcher vom Zentrum der Aufblasung verschieden ist,

$$x \neq \xi ,$$

besteht $\pi^{-1}(x)$ aus genau einem Punkt.

(ii) Die Aufblasung π induziert einen Isomorphismus

$$\prod - \pi^{-1}(\xi) \to P^N - \{\xi\}$$

mit der Umkehrung

$$\rho: P^N - \{\xi\} \to \prod - \pi^{-1}(\xi),\ (x_1,\dots,x_N) \mapsto ((x_1,\dots,x_N), [x_1,\dots,x_N]).$$

(iii) $\pi^{-1}(\xi) = \{\xi\}\times P^{N-1}$.

(iv) Sei $g \subseteq P^N$ eine Gerade durch ξ. Dann läßt sich die Einschränkung von ρ auf die punktierte Gerade

$$g - \{\xi\}$$

eindeutig zu einer regulären Abbildung

$$\rho|_g : g \to \prod$$

auf ganz g fortsetzen. Das Bild

$$(\rho|_g)(\xi) \in \pi^{-1}(\xi)$$

hängt von der Wahl der Geraden g ab und die Abbildung

$$\{\text{Gerade durch } \xi\} \to \pi^{-1}(\xi)\ ,\ g \mapsto (\rho|_g)(\xi),$$

ist bijektiv.

(v) $\prod$ ist nicht-singulär.

(vi) $\prod$ ist irreduzibel.

Beweis. Zu (i). Auf Grund der definierenden Gleichungen von $\prod$ ist

$$z = (x',y') \in \pi^{-1}(x),$$

äquivalent zu

$$x' = x \text{ und } y'_i = \frac{y'_{i_0}}{x'_{i_0}} \cdot x'_i\ .$$

Dabei sei x_{i_0} irgendeine von Null verschiedene Koordinate von x (welche wegen $x \neq \xi$ existiert). Der Punkt y' im projektiven Raum P^{N-1} ist somit durch x eindeutig festgelegt.

Anders ausgedrückt: wegen der Relationen $x_i y_j - y_i x_j = 0$ legen die vorgegebenen x_i die Verhältnisse der y_j eindeutig fest, d.h. der zugehörige Punkt y im projektiven Raum ist eindeutig festgelegt.

Zu (ii). Offensichtlich gilt

$$\pi \circ \rho = \mathrm{Id}.$$

[3] Bl = blowing up oder blowup.

Damit gilt aber auch

$$\rho\circ\pi = \text{Id auf } \prod - \pi^{-1}(\xi),$$

denn wegen (i) ist die Einschränkung von π auf $\prod - \pi^{-1}(\xi)$ bijektiv.

Zu (iii). Im Fall $x = \xi$ sind die definierenden Gleichungen von $\prod$ mit beliebigem y erfüllt.

Zu (iv) r wählen einen von ξ verschiedenen Punkt $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ auf der Geraden g. Die Gerade g besteht dann aus den Punkten, deren Koordinaten zu denen von α proportional sind. Sie ist also durch die Gleichungen

$$\alpha_i x_j - \alpha_j x_i = 0 \ (i,j = 1,\ldots, N)$$

gegeben. Wegen $\alpha \neq \xi$ ist eine der Koordinaten von α ungleich Null, sagen wir die i-te. Wir können annehmen, daß diese Koordinate gleich 1 ist. Die Gerade g ist dann durch die Gleichungen

$$g\colon x_j = \alpha_j x_i \ (j = 1, \ldots , N).$$

gegeben.

Beweis der Fortsetzbarkeit von $\rho|_{g-\{\xi\}}$.

Für $x = (x_1,\ldots,x_N) \in g$, d.h. $x_j = \alpha_j \cdot x_i$ für $j=1,\ldots,N$ gilt

$$\begin{aligned}\rho(x) &= (x, [x_1,\ldots,x_N]) \\ &= (x, \alpha) \text{ mit } \alpha := [\alpha_1,\ldots,\alpha_i=1,\ldots,\alpha_N].\end{aligned}$$

Die zweite Koordinate des Bildes ist somit nur abhängig von g und nicht vom Punkt $x\in g$. Durch die Vorschrift

$$\rho(x) = (x, \alpha)$$

ist somit die gesuchte Fortsetzung auf ganz g definiert. Aus Stetigkeitsgründen ist dies die einzig mögliche reguläre Fortsetzung.

Beweis der übrigen Aussagen von (iv).
Es gilt

$$\mathrm{Im}(\rho|_g) = g\times\{[\alpha]\} \text{ und } \rho|_g(\xi) = (0, [\alpha])$$

wobei $[\alpha]\in P^{N-1}$ die Gerade g ist, aufgefaßt als Punkt des projektiven Raums. Die Abbildung von (iv) hat also die Gestalt

$$\{\text{Geraden durch } \xi\} \longrightarrow \pi^{-1}(\xi) = \{\xi\}\times\mathbb{P}^{N-1},\ g \mapsto (0, g).$$

Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv und nach Definition des projektiven Raums $\mathbb{P}^{N-1}$ auch surjektiv.

Zu (v). Weil $\prod - \pi^{-1}(\xi)$ isomorph ist zu $P^N - \{\xi\}$ ist $\prod$ nicht-singulär in allen Punkten, die nicht über dem Zentrum der Aufblasung liegen. Sei jetzt

$$z' = (x',y') \in \pi^{-1}(\xi),$$

d.h. $x' = \xi$. Wir schreiben $y' = [y'_0,\ldots,y'_N]$. Mindestens eine projektive Koordinate von y' ist von Null verschieden, sagen wir die i-te.
Dann liegt z' in der affinen Umgebung

$$\mathbb{A}^N\times\{y_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^N\times P^{N-1}$$

und $\prod$ hat dort die affinen Gleichungen

$$x_i y_j - y_i x_j = 0 \text{ für } i,j = 1,\ldots,N \text{ mit } y_i \neq 0,$$

d.h.

$$x_j = x_i y_j / y_i \text{ für } j = 1, \ldots , N.$$

Die Abbildung

$$\{y_i \neq 0\} \cap \prod \longrightarrow \mathbb{A}^N,\ (x,[y]) \mapsto (x_i, \frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \ldots , \frac{y_N}{y_i})$$

ist regulär mit der regulären Umkehrung

$$(x_i , y_1 , \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots , y_N)$$

$$\mapsto$$

$$((x_i y_1, \ldots, x_i y_{i-1}, x_i , x_i y_{i+1}, \ldots , x_i y_N), [y_1 , \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots , y_N])$$

Es gibt in der Umgebung des betrachteten Punktes eine Karte, d.h. $\prod$ ist in diesem Punkt eine Mannigfaltigkeit. Der betrachtete Punkt ist nicht-singulär.

Zu (vi). Zumindest ist

$$\prod - \pi^{-1}(\xi)$$

irreduzibel (da isomorph ist zu $P^N - \{x_0\}$). Damit ist aber auch die Abschließung

$$\overline{\prod - \pi^{-1}(\xi)}$$

irreduzibel. Es reicht zu zeigen, $\pi^{-1}(\xi)$ liegt ganz in dieser Abschließung. Wegen (iv) recht es zu zeigen, für jede Gerade g durch ξ gilt

$$(\rho|_g)(g) \subseteq \overline{\prod - \pi^{-1}(\xi)}$$

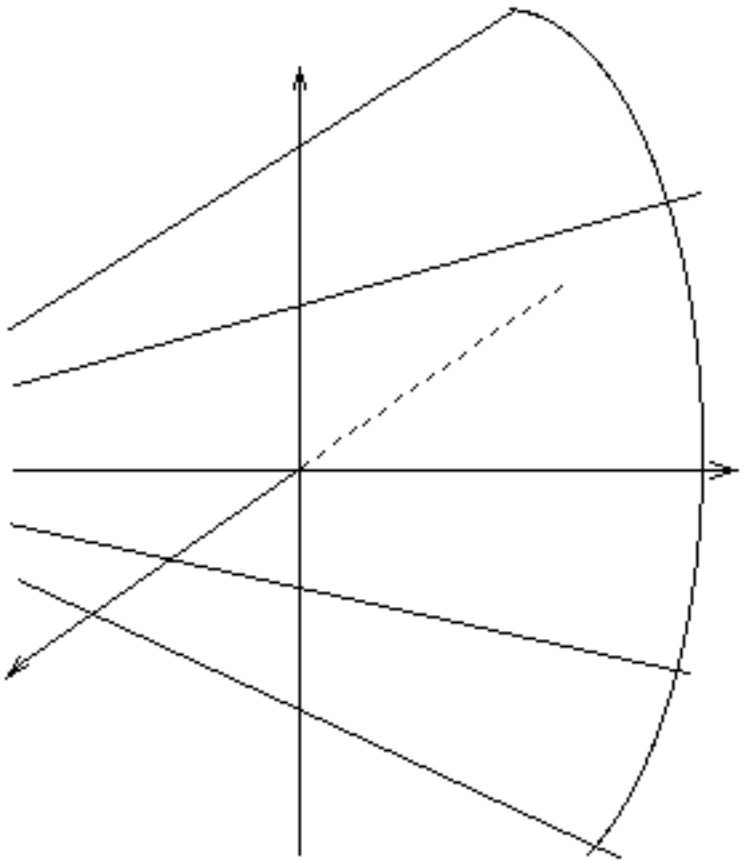
Nun ist aber $(\rho|_g)(g)$ gerade die Abschließung von $(\rho|_g)(g - \{\xi\})$ und es gilt nach Definition von ρ (vgl. (ii))

$$(\rho|_g)(g - \{\xi\}) = \rho(g - \{\xi\}) \subseteq \prod - \pi^{-1}(\xi).$$

QED.

Bemerkung

Im Fall N = 2 kann man sich die Aufblasung $\prod = Bl_\xi(P^2) \to P^2$ durch deren Wirkung auf die Geraden g durch x veranschaulichen. Die Kurve $\rho(g)$ schneidet die Gerade $\{\xi\}\times P^1$ in einem Punkt, der sich in dem Maße verschiebt, wie sich die Gerade g um das Zentrum dreht. Die Fläche $\prod$ ähnelt daher der Windung einer Schraube.



1.2 Strikte Transformierte

Seien $\pi:\prod \to \mathbb{A}^N$ die Aufblasung des Punktes $\xi\in\mathbb{A}^N$ und

$$X = V(f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{A}^N$$

eine algebraische Menge. Die strikte Transformierte X' von X entlang π ist dann definiert als die Abschließung von

$$\pi^{-1}(X - \{\xi\}) \text{ in } \prod.$$

Beispiel 1

Falls ξ nicht auf X liegt, ist die strikte Transformierte von X gerade das vollständige Urbild

$$X' = \pi^{-1}(X) \text{ falls } \xi\notin X.$$

von X (und isomorph zu X),

$$\pi|_{X'}: X' \xrightarrow{\cong} X.$$

Beispiel 2

Ist $X = g \subseteq \mathbb{A}^N$ eine Gerade durch ξ so ist die strikte Transformierte eine Gerade von $\prod$, die sich bei π isomorph auf g abbilded,

$$\pi|_{g'}: g' \xrightarrow{\cong} g \text{ für geraden } g \text{ durch } \xi.$$

Je zwei verschiedene Geraden durch den Ursprung gehen dabei in disjunkte Geraden über.

Beispiel 3

Sei

$$X = V(x_2^2 - x_1^2 - x_1^3) \subseteq \mathbb{A}^2.$$

In der Nähe des Ursprungs ξ nähert sich die Kurve X immer mehr einer der beiden Geraden

$$x_2 = \pm x_1.$$

Die strikten Transformierten dieser beiden Geraden sind disjunkt. Es ist deshalb zu erwarten, daß die beiden sich im Ursprung treffenden Zweige der Kurve beim Übergang zur strikten Transformierten getrennt werden.

Sehen wir uns die Situation explizit an, indem wir zunächst die Gleichungen des vollständigen Urbilds von X bestimmen. Das vollständige Urbild ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x_2^2 - x_1^2 - x_1^3 &= 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} (x_2^2 - x_1^2 - x_1^3)y_1^2 &= 0 \\ (x_2^2 - x_1^2 - x_1^3)y_2^2 &= 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} (y_2^2 - y_1^2 - x_1y_1^2)\, x_1^2 &= 0 \\ (y_2^2 - y_1^2 - x_1y_1^2)\, x_2^2 &= 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Außerhalb der Faser über ξ ist x_1 oder x_2 von Null verschieden, d.h. die Gleichungen haben dort die Gestalt

$$\begin{aligned} y_2^2 - y_1^2 - x_1y_1^2 &= 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Die Faser über ξ ist durch die Gleichungen

$$y_2^2 - y_1^2 = 0,\ x_1 = x_2 = 0,$$

gegeben, besteht also aus zwei verschiedenen Punkten (im projektiven Raum). Eine etwas aufwendigere Rechnung zeigt, daß die strikte Transformierte eine Kurve ohne Singularitäten ist.
Wir werden uns später mit Hilfe von anderen Methoden davon überzeugen, daß dies tatsächlich so ist.

Beispiel 4
Die strikte Transformierte der semikubischen Parabel ist eine nicht-singuläre Kurve, welche die Faser über ξ berührt.
Wir werden uns später mit Hilfe von anderen Methoden davon überzeugen, daß dies tatsächlich so ist.

Bemerkung
Wählt man anstelle der semikubischen Parabel eine Spitze "höherer Ordnung", so erhält man strikte Transformierte, die nach wie vor singulär sein können. In einem gewissem Sinne ist die Spitze der neuen Kurve aber "weniger hoch".

1.3 Eine Übersetzung in die kommutative Algebra

Wir wollen jetzt die Beschreibung der obigen geometrischen Situation in die Sprache der kommutativen Algebra vornehmen, d.h. wir wollen die Beschreibung wiederholen, dabei aber die beteiligten kommutativen Ringe verwenden. Der Einfachheit nehemen wir dabei annehmen, daß alle Koordinaten der oben untersuchten Punkte in einem algebraisch abgeschlossenen Körper

$$k = \overline{k}$$

liegen. Dem affinen Raum $\mathbb{A}^N$ entspricht dabei der Polynomring

$$\mathbb{A}^n = k^n \quad \longleftrightarrow \quad k[x_1,...,x_N]$$

$$(a_1,...,a_N) \quad \longleftrightarrow \quad (x_1 - a_1,...,x_N - a_N)$$

Die Elemente dieses Polynomrings sind gerade die rationalen Funktionen, die auf dem gesamten Raum regulär sind.

Dem Punkt $a = (a_1,...,a_N)$ des $\mathbb{A}^n$ entspricht dabei das maximale Ideal

$$m_a := (x_1 - a_1,...,x_N - a_N) = \text{Kern der Abbildung } k[x_1,...,x_N] \longrightarrow k,\ f(x) \mapsto f(a).$$

des Polynomrings. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist auf diese Weise eine Bijektion zwischen der Menge der Punkte des $\mathbb{A}^n$ und der Menge der maximalen Ideale von $k[x_1,...,x_N]$ definiert.

Dem projektiven Raum $\mathbb{P}^{N-1}$ entspricht dabei der graduierte Ring

$$\mathbb{P}^{N-1} \quad \longleftrightarrow \quad k[y_1,....,y_N]$$

$$[a_1,...,a_N] \quad \longleftrightarrow \quad (a_i y_j - a_j y_i \mid i,j = 1, ... , N)$$

Die homogenen Elemente des Grades n dieses Polynomrings sind gerade die Schnitte in die (-n)-te Potenz des <u>tautologischen Geradenbündels</u>[4] $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes(-n)}$, die in allen Punkten des Raums regulär sind.

Dem Punkt $a = [a_1,...,a_N] \in \mathbb{P}^n$ mit den projektiven Koordinaten a_i entspricht dabei das <u>homogenen Ideal</u>[5] $(a_i y_j - a_j y_i \mid i,j = 1, ... , N)$ welches maximal ist unter allen

---

[4] Seien V ein (N+1)-dimensionaler k-Vektorraum und $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ der zugehörige N-dimensionale projektive Raum der Geraden von V durch den Ursprung. Das tautologische Bündel von $\mathbb{P}$ ist dann gerade das Teilbündel des trivialen Vektorraumbündels

$$V \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P},\ (v, p) \mapsto p,$$

dessen Faser über dem Punkt $p \in \mathbb{P}$ aus den Paaren der Gestalt (v, p) besteht, wobei v die Punkte der Geraden $p \subseteq V$ durchläuft, d.h. die Faser im Punkt p ist die Gerade p.

[5] Ein Ideal I des Polynomrings $k[y_1,....,y_N]$ heißt homogen, wenn es von homogenen Polynome erzeugt wird. Das ist äquivalent zur Bedingung, daß mit jedem $f \in I$ jede homogene Komponente von f ebenfalls in I liegt, d.h. wir schreiben f in der Gestalt $f = f_0 + f_1 + ...$ mit f_i homogen vom Grad i und fordern $f_i \in I$ für jedes i.

Man beachte, für homogene Polynome f und Punkte $p = [p_1,...., p_N]$ des projektiven Raumes hängt die Bedingung

$$f(p_1,...., p_N) = 0$$

homogenen Idealen von $k[y_1,....,y_N]$, welche vom irrelevanten Ideal[6] $(y_1,....,y_N)$ verschieden sind.

Dem direkten Produkt $\mathbb{A}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ entspricht gerade der Polynom-Ring

$$k[x_1,...,x_N, y_1,....,y_N],$$

der als graduiert bezüglich der y_i zu betrachten ist. Die homogenen Elemente dieses Rings können weiterhin als reguläre Funktionen auf dem Produkt $\mathbb{A}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ aufgefaßt werden, deren Werte in einem Geradenbündel liegen. Die Funktionen, welche auf der Teilmenge $\prod$ identisch Null sind, bilden das Ideal

$$(x_i y_j - x_j y_i \mid i,j = 1, \ldots , N).$$

Zwei Funktionen auf $\mathbb{A}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$, welche sich nur um ein Element aus diesem Ideal unterscheiden, haben dieselben Einschränkungen auf $\prod$. Umgekehrt kann man zeigen, die Funktionen auf $\prod$ lassen sich auf das Produkt $\mathbb{A}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ fortsetzen, und zwei Fortsetzungen derselben Funktion unterscheiden sich um ein Element aus diesem Ideal. Auf diese Weise läßt sich der Faktorring

$$k[x_1,...,x_N, y_1,....,y_N]/(x_i y_j - x_j y_i \mid i,j = 1, \ldots , N)$$

als projektiver Koordinatenring der projektiven Varietät $\prod$ interpretieren.
Wir schreiben jetzt

$$R := k[x_1,...,x_N],\ S := R[y_1,....,y_N],\ I := /(x_i y_j - x_j y_i \mid i,j = 1, \ldots , N).$$

Da das Ideal die Aufblasung des affinen Raums im Urprung beschreibt, spielt außerdem noch das zum Urprung gehörige Ideal von R eine Rolle:

$$m := (x_1,...,x_N) \qquad (\subseteq R).$$

Wir suchen nach einer Beschreibung des Koordinatenrings S/I mit Hilfe der Ausgangsdaten R und m, die sich verallgemeinern läßt, d.h. wir wollen mit Hilfe von R und m einen graduierten Ring konstruieren, welcher isomorph ist zu R/I.
Dazu betrachten wir die direkte Summe

$$Bl_m(R) := \oplus_{i=0}^{\infty} m^i$$

der Potenzen des Ideals m. Dies ist offensichtlich ein R-Modul. Jedes Element hat die Gestalt

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \text{ mit } \alpha_i \in m^i,$$

wobei nur endlich viele Summanden ungleich Null sind. Ist

$$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \text{ mit } \beta_i \in m^i,$$

ein weiteres solches Element, so kann man ein Produkt von α und β definieren, indem man

---

nicht von der speziellen Wahl der projektiven Koordinaten p_i des Punktes p ab.

[6] Man beachte, die Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome des irrelevanten Ideals ist leer (weil jeder Punkt im projektiven Raum mindestens eine von Null verschiedene Koordinate hat). Man kann umgekehrt zeigen, homogene Ideale mit leerer Nullstellen-Menge enthalten eine Potenz des irrelevanten Ideals.
Die maximalen von $(y_1,....,y_N)$ verschiedenen homogenen Ideale haben gerade minimale (nicht-leere) Nullstellen-Mengen (und diese sind Punkte).

$$\alpha\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{u+v=i} \alpha_u \beta_u$$

mit $\alpha_u\beta_u \in m^u \bullet m^v = m^{u+v} = m^n$. Die direkte Summe wird auf diese Weise zu einer graduierten R-Alge
bra, deren homogener Bestandteil des Gerades i gerade m^i wird. Wegen

$$m^u \bullet m^v = m^{u+v}$$

addieren sich die Grade homogener Elemente beim Multiplizieren. Zeigen wir, diese graduierte Algebra ist als graduierte Algebra isomorph zu S/I. Dazu betrachten wir den Homomorphismus von graduierten R-Algebren

$$S = R[y_1,\ldots,y_N] \longrightarrow Bl_m(R),\ ry_1^{n_1}\bullet\ldots\bullet y_N^{n_N} \mapsto rx_1^{n_1}\bullet\ldots\bullet y_N^{n_N} \in m^{n_1+\ldots+n_N},$$

der jedes homogene Polynom f(y) des Grades i abbildet in $f(x) \in m^i$. Das jedes Element von m^i eine R-Linearkombination von Potenzprodukten des Grades i in den x_j ist, ist dieser R-Algebra-Homomorphismus surjektiv. Die Erzeuger $x_iy_j - x_jy_i$ des Ideals I liegen im Kern dieses Homomorphismus. Wir erhalten so eine Surjektion

$$S/I \twoheadrightarrow Bl_m(R).$$

Durch Vergleich der k-Vektorraum-Dimensionen der homogenen Bestandteile der einzelnen Grade bezüglich der Graduierung in den x_i zusammen mit den y_j sieht man, diese Abbildung ist bijektiv, also ein Isomorphismus.

1.4. Affine Spektren

K-rationale Punkte des affinen Raums $\mathbb{A}^N$ und Homomorphismen $k[T_1,\ldots,T_n]\longrightarrow K$

K-rationale Punkte algebraischer Mengen und Homomorphismen $k[T_1,\ldots,T_n]/I\longrightarrow K$
Nullstellensatz, Primideale - Punkte - Auswertungsabbildungen, allgemeine Punkte

Morphismen und Homomorphismen
Fasern und Erweiterungsideale
Ideale und Teilspektren,
Der graduierte Ring zu einem Ideal, welches von einer regulären Sequenz erzeugt wird.

1.5. Schemata und projektive Spektren

Garben, Keime, Halme
Inverse und direkte Bilder, Adjungiertheit der Funktoren
Morphismen von Schemata
Schema-theoretisches inverses Bild, Adjungiertheit der Funktoren

separierte Morphismen
eigentliche Morphismen
kohärente Garben
umkehrbare Garben, reguläre Elemente, Cartier-Divisoren, Effektivität von Divisoren.
kohärente Ideal-Garben und lokal abgeschlossene Teilschemata

Proj A[T] =[7] Spec A für kommutative Ringe A mit 1.
Proj $\mathcal{O}_X[T] = X$ für Schemata X.

1.6 Aufblasungen

1.6.1 Definition

Sei X ein Schema und $Y \subseteq X$ ein lokal abgeschlossenes Teilschema mit der Idealgarbe I_Y. Dann heißt

$$X' := \mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} I_Y^i$$

bzw. der zugehörige Morphismus von Schemata

$$\pi: X' \longrightarrow X$$

Aufblasung von X entlang Y oder auch Aufblasung von X mit dem Zentrum

$$Y = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X/I_Y.$$

Wir schreiben auch

$$\mathrm{Bl}_Y(X) := \mathrm{Bl}_I(X) = \mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} I_Y^i\ .$$

(vgl. Hartshorn, R.: Algebraic geometry, Definition hinter Proposition II.7.12).

Eine monoidale Transformation ist eine Aufblasung, deren Zentrum ein reduziertes nicht-singuläres Teilschema ist.

Eine quadratische Transformation ist eine monoidale Transformation, deren Zentrum aus nur einem (abgeschlossenen) Punkt besteht.

1.6.2 Das ideal-inverse Bild einer Ideal-Garbe

Seien $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und $I \subseteq \mathcal{O}_Y$ eine Garbe von Idealen von $\mathcal{O}_Y$.

Betrachten wir zunächst f als stetige Abbildung von topologischen Räumen. Dann ist das inverse Bild $f^{-1}I$ von I eine Garbe von Idealen der Garbe von Ringen $f^{-1}\mathcal{O}_Y$. Der Garben-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

von Ring-Garben auf Y definiert einen Garben-Homomorphismus

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

von Ring-Garben auf X, und durch Einschränken einen Garben-Homomorphismus

$$f^{-1}I \hookrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Das Bild des letzteren ist eine Garbe von Idealen von $\mathcal{O}_X$ und wird mit

---

[7] Die homogenen Elemente von A[T] sind von der Gestalt $a \cdot T^n$. Liegt ein solches Element in einem homogenen Primideal P von A[T] so gilt $a \in P$ oder $T \in P$. Die einzigen homogenen Primideale von A[T], welche T nicht enthalten sind somit von der Gestalt pA[T] mit einem Primideal von p von A.

$$I\bullet\mathcal{O}_X = f^{-1}I\bullet\mathcal{O}_X.$$

Sie heißt ideal-inverses Bild von I entlang f (inverse image ideal sheaf of I along f).

(vgl. Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Definition hinter Example II.7.12.1)

Bemerkungen

(i) $I\bullet\mathcal{O}_X$ ist im allgemeinen verschieden vom inversen Bild

$$f^*I = f^{-1}I \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X .$$

Das liegt in erster Linie daran, daß f^*I im allgemeinen keine Garbe von Idealen von $\mathcal{O}_X$ ist, denn die natürliche Abbildung

$$f^*I = f^{-1}I \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \longrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$$

ist im allgemeinen nicht injektiv. Das Bild von f^*I bei dieser Abbildung ist allerding gleich $I\bullet\mathcal{O}_X$.

(ii) Sei $h: B \longrightarrow A$ ein Homomorphismus von Ring mit 1 und

$$f: X := \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} B =: Y,\ p \mapsto f^{-1}(p),$$

der zugehörige Morphismus der affinen Schemata. Weiter sei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_Y$ die kohärente Garbe von Idealen zum Ideal

$$J \subseteq B.$$

Dann ist $f^*\mathcal{J}$ die kohärente Garbe auf X zum A-Modul $A\otimes_B J$ und $\mathcal{J}\bullet\mathcal{O}_X$ die kohärente Garbe vom Idealen zum Ideal

$$J\bullet A = h(J)\bullet A = \text{Bild von } A\otimes_B J \longrightarrow A,\ a\otimes x \mapsto a\bullet h(x).$$

Insbesondere gilt $Z = \operatorname{Spec} B/J \hookrightarrow \operatorname{Spec} B = Y$:

$$f^{-1}(Y) = \mathbb{X}\times_Y Z = \operatorname{Spec} A\otimes_B B/J = \operatorname{Spec} A/J\bullet A = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}\bullet\mathcal{O}_X$$

(iii) Ist $I \subseteq \mathcal{O}_Y$ die Ideal-Garbe eines lokal abgeschlossenen Teilschemas von Y, so ist $I\bullet\mathcal{O}_X$ auf Grund der lokalen Beschreibung von (ii) gerade die Ideal-Garbe des Teilschemas $f^{-1}(Y) = \mathbb{X}\times_Y Z$ von X,

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_Y/I) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/I\mathcal{O}_X$$

1.6.3 Die lokalen Ringe einer Aufblasung

Seien $\pi: X' \longrightarrow X$ eine Aufblasung des Schemas X mit dem Zentrum

$$Y := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/I_Y,$$

$$x \in X$$

ein Punkt, $x'\in\pi^{-1}(x)$ ein über x liegender Punkt und

$$(R, M) \text{ bzw. } (R', M')$$

die lokalen Ringe von X bzw. X' in x bzw. x'. Weiter sei

$$I \subseteq R$$

der Halm von I_Y im Punkt x. Dann gibt es ein Element $t \in I - \{0\}$ mit

$$R' = R[\frac{I}{t}]_N$$

Dabei bezeichne N ein Primideal des Teilrings $R[\frac{I}{t}]$ des Quotientenrings R_t von R bezüglich der Potenzen von t.

Beweis. Die zu beweisenden Aussagen sind lokaler Natur. Wir können X durch eine affine Umgebung des Punktes x ersetzen und annehmen,

$$X = \text{Spec } R.$$

Weiter können wir annehmen, das Teilschema Y ist durch ein Ideal

$$I \subseteq R$$

gegeben, d.h.

$$X' := \text{Proj } S \text{ mit } S := \oplus_{i=0}^{\infty} I^i.$$

Der über x liegende Punkt x' ist dann durch ein homogenes Primideal

$$P \subseteq S$$

gegeben, welches das irrelevante Primideal dieses graduierten Rings nicht enthält. Da S über R von Elementen des Grades 1 erzeugt wird, gibt es ein

$$t \in I - P$$

welches (aufgefaßt als Element des Grades 1 von S) nicht in P liegt. Mit anderen Worten, P liegt in der offenen Hauptmenge $D(t) \subseteq \text{Proj } S$,

$$p \in D(t) = \text{Spec } S_{(t)} .$$

Dabei bezeichne $S_{(t)}$ den Teilring

$$S_{(t)} = \{\frac{s}{t^n} \mid n \in \mathbb{N}, s \in S \text{ homogen vom Grad } n \}$$

des $\mathbb{Z}$-graduierten Rings S_t , der aus den homogenen Elementen des Grades 0 besteht. Zwei Elemente $\frac{a}{t^u}$ und $\frac{b}{t^v}$ von S_t sind genau dann gleich, wenn $a \cdot t^v - b \cdot t^u$ von einer t-Potenz annulliert wird. Deshalb läßt sich $S_{(t)}$ auch als Teilring von R_t auffassen,

$$S_{(t)} \subseteq R_t$$

Als Teilring von R_t ist $S_{(t)}$ gerade die Vereinigung der Potenz von $\frac{I}{t} \subseteq R_t$, d.h.

$$S_{(t)} = R[\frac{I}{t}]$$

Der lokale Ring von X' im Punkt $P \in \text{Spec } S_{(t)} = D(t) \subseteq X'$ ist damit die Lokalisierung von $S_{(t)} = R[\frac{I}{t}]$ bezüglich des zu P gehörigen Primideals von $R[\frac{I}{t}]$.
QED.

1.6.4 Der Ausnahme-Divisor

Sei π: $X' \longrightarrow X$ eine Aufblasung des Schemas X mit dem Zentrum

$$Y := \text{Spec } \mathcal{O}_X/\mathcal{J}.$$

Dann wird das Ideal $\mathcal{J}\cdot\mathcal{O}_{X'}$ lokal in allen Punkten von einem Nicht-Nullteiler erzeugt, d.h.

$$\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}\cdot\mathcal{O}_{X'} = f^{-1}(Y)$$

ist ein Divisor von X' und heißt Ausnahme-Divisor der Aufblasung π.
Es gilt

$$f^{-1}(Y) = \mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i/\mathcal{J}^{i+1} \tag{1}$$

Beweis. Die Aussage ist lokaler Natur. Wir können annehmen, X ist affin,

$$X = \mathrm{Spec}\ A$$

und Y ist durch ein Ideal $J \subseteq A$ gegeben,

$$Y = \mathrm{Spec}\ A/J.$$

Wir haben zu zeigen, für jeden Punkt $x' \in X' = \mathrm{Bl}_I(\mathrm{Spec}\ A)$ wird das Ideal

$$J\cdot\mathcal{O}_{X',x'}$$

von einem regulären Element von $\mathcal{O}_{X',x'}$ erzeugt.
Falls $\pi(x')$ nicht im Zentrum der Aufblasung liegt, gilt

$$J\cdot\mathcal{O}_{X',x'} = \mathcal{O}_{X',x'} = 1\cdot\mathcal{O}_{X',x'}$$

und die Aussage ist trivial. Sei also

$$x = \pi(x') \in Y = \mathrm{Spec}\ A/I.$$

Wir setzen

$$R := \mathcal{O}_{X,x}$$
$$R' := \mathcal{O}_{X',x'}$$
$$I := J\cdot R$$

Nach 1.6.3 gibt es ein Element $t \in I - \{0\}$ und ein Primideal $N \subseteq R[\frac{I}{t}]$ mit

$$R' = R[\frac{I}{t}]_N$$

Für jedes $x \in J$ gilt in R_t

$$x = t\cdot\frac{x}{t} \in t\cdot\frac{I}{t} \subseteq t\cdot R[\frac{I}{t}],$$

also

$$J\cdot R[\frac{I}{t}] \subseteq t\cdot R[\frac{I}{t}]$$

also

$$I\cdot R' = J\cdot R' = t\cdot R' \subseteq I\cdot R',$$

wobei die letzte Inklusion wegen $t \in I$ besteht. Zusammen erhalten wir

$$I\cdot R' = t\cdot R'.$$

Wegen $R' \subseteq R_t$ ist der Erzeuger t von $I\cdot R'$ ein R'-reguläres Element.

Es ist noch die Identität (1) zu beweisen. Nach Definition ist $f^{-1}(Y)$ ein lokal abgeschlossenes Schema von

$$X' = \mathrm{Bl}_Y(X) = \mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i,$$

und dasselbe gilt für das Schema auf der rechten Seite von (1) auf Grund der natürlichen Surjektion graduierter Ringe

$$\oplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i \twoheadrightarrow \oplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i/\mathcal{J}^{i+1}.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, beide Teilschemata sind auf den Mengen einer affinen Überdeckung durch dieselben Ideale definiert.
Diese Aussage ist lokaler Natur bezüglich X, d.h. wir können wieder annehmen, X ist affin,

$$X = \operatorname{Spec} A$$

und Y ist durch ein Ideal $J \subseteq A$ gegeben,

$$Y = \operatorname{Spec} A/J.$$

Die Aufblasung

$$X' = \operatorname{Proj} \oplus_{i=0}^{\infty} I^i$$

von X entlang Y wird dann von den offenen Hauptmengen der Gestalt

$$D(t) := \{P \in X' \mid t \notin P\} \text{ mit } t \in I$$

überdeckt. Dieselbe Rechnung wie die eben durchgeführte zeigt, das Teilschema $f^{-1}(Y)$ ist auf $D(t) = \operatorname{Spec} A[\frac{I}{t}]$ durch das Ideal

$$I \bullet A[\tfrac{I}{t}] = t \bullet A[\tfrac{I}{t}]$$

gegeben. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, dies ist auf D(t) auch das Ideal der rechten Seite von (1). Sei

$$S := \oplus_{i=0}^{\infty} I^i.$$

Betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \bullet S \longrightarrow S \longrightarrow S/IS \longrightarrow 0$$

Das Teilschema auf der rechten Seie von (1) ist gerade gerade Proj S/IS. Wir tensorieren die exakte Sequenz mit S_t über S und gehen zu den Bestandteilen des Grades Null über. Wir erhalten so die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (I \bullet S) \cap S_{(t)} \longrightarrow S_{(t)} \longrightarrow (S/IS)_{(t)} \longrightarrow 0$$

Die rechte Seite von (1) ist damit auf $D(t) = \operatorname{Spec} S_{(t)} = \operatorname{Spec} A[\frac{I}{t}]$ durch das Ideal

$$(I \bullet S) \cap S_{(t)} = \{\tfrac{a}{t^i} \mid a \in I^{i+1}\} = \{t \bullet \tfrac{a}{t^{i+1}} \mid a \in I^{i+1}\} = t \bullet A[\tfrac{I}{t}]$$

gegeben, d.h. durch dasselbe Ideal wie die linke Seite von (1).
QED.

1.6.5 Aufblasungen außerhalb des Zentrums

Sei π: X' $\longrightarrow$ X eine Aufblasung des Schemas X mit dem Zentrum

$$Y := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$$

und U := X - Y. Dann ist die Einschränkung

$$\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

ein Isomorphismus.
Beweis. Für die Einschränkung von $\mathcal{J}$ auf U gilt

$$\mathcal{J}|_U = \mathcal{O}_U .$$

Damit ist

$$\pi^{-1}(U) = \operatorname{Proj} \oplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i|_U = \operatorname{Proj} \oplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{O}_U = \operatorname{Proj} \mathcal{O}_U[T] = U.$$

QED.

1.6.6 Die Universalitätseigenschaft der Aufblasungen

Seien X ein noethersches Schema, Y := Spec $\mathcal{O}_X/I$ ein lokal abgeschlossenes Teilschema und

$$\pi\colon X' := Bl_I(X) \longrightarrow X$$

die Aufblasung von X mit dem Zentrum Y. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(i) $I\cdot\mathcal{O}_{X'}$ ist eine umkehrbare Garbe.

(ii) Sei f: Z $\longrightarrow$ X ein Morphismus von Schemata mit der Eigenschaft, daß $I\cdot\mathcal{O}_Z$ eine umkehrbare Garbe ist. Dann gibt es genau einen Morphismus von Schemata

$$g\colon Z \longrightarrow Bl_I(X),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & Bl_I(X) \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis. siehe Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Proposition II.7.14.
QED.

1.6.7 Basiswechsel

Seien f: X' $\longrightarrow$ X ein Morphismus von noetherschen Schemata,

$$Z := \text{Spec } \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$$

ein lokal abgeschlossenes Teilschema von X und

$$\pi\colon Bl_{\mathcal{J}}(X) \longrightarrow X$$

die Aufblasung von Z in X. Weiter seien

$$Z' := f^{-1}(Z) = \text{Spec } \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}' \text{ mit } \mathcal{J}' := \mathcal{J}\cdot\mathcal{O}_{X'},$$

das schema-theoretische vollständige Urbild von Z in X' und

$$\pi'\colon Bl_{\mathcal{J}'}(X') \longrightarrow X'$$

die Aufblasung von Z' in X'. Dann gibt es genau einen Morphismus von Schemata

$$g\colon Bl_{\mathcal{J}'}(X') \longrightarrow Bl_{\mathcal{J}}(X)$$

derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Bl_{\mathcal{J}'}(X') \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi'"'] & Bl_{\mathcal{J}}(X) \arrow[d, "\pi"] \\ X' \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Ist f außerdem eine abgeschlossene Einbettung, so gilt dasselbe für g.

Ist X' vermittels f ein abgeschlossenes Teilschema von X, so heißt das vermittels g definierte abgeschlossene Teilschema $Bl_{\mathcal{J}'}(X')$ von $Bl_J(X)$ auch <u>strikte Transformierte</u> von X' entlang π.

Beweis. Wir setzen

$$B := Bl_{\mathcal{J}}(X)$$

$$B' := Bl_{\mathcal{J}'}(X').$$

Nach 1.6.5 (i) wird

$$\mathcal{J}'\bullet\mathcal{O}_{B'} = (\mathcal{J}\bullet\mathcal{O}_{X'})\bullet\mathcal{O}_{B'} = \mathcal{J}\bullet\mathcal{O}_{B'}$$

local von einem regulären Element erzeugt. Nach 1.6.5 (ii) faktorisiert sich $f\circ\pi'$ eindeutig über π, d.h. es existiert wie behauptet genau ein Morphismus g, für welchen das obige Viereck kommutativ wird.

Sei jetzt f zusätztlich eine abgeschlossene Einbettung. Wir haben zu zeigen, daß dies dann auch für g gilt. Diese Aussage ist bezüglich X von lokaler Natur. Wir können deshalb X durch eine affine Umgebung eines vorgegebenen Punktes ersetzen und annehmen,

$$X = \text{Spec } A.$$

Außerdem können wir annehmen,

$$Z = \text{Spec } A/I$$

$$X' = \text{Spec } A' \text{ mit } A' = A/J$$

und der Morphismus f kommt vom natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow A/J = A'$. Nach Definition ist

$$B = \text{Proj } S \text{ mit } S = \oplus_{n=0}^{\infty} J^n$$

$$B' = \text{Proj } S' \text{ mit } S' = \oplus_{n=0}^{\infty} J'^n \text{ und } J'^n = J^n\bullet A' = J^n + I/I$$

Damit ist S' isomorph zu einem Faktorring von S modulo einem homogenen Ideal, d.h. B' ist ein abgeschlossenes Teilschema von B.

QED.

1.6.8 Aufblasungen von Varietäten

Seien X eine algebraische Varietät (d.h. ein integrales separiertes Schema endlichen Typs über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k)[8],

$$Y = \text{Spec } \mathcal{O}_X/I$$

ein lokal abgeschlossenes Teilschema und

$$\pi: X' \longrightarrow X$$

die Aufblasumg mit dem Zentrum Y. Dann gilt

(i) X' ist eine algebraische Varietät.

(ii) π ist birational, eigentlich und surjektiv.

(iii) Ist X quasi-projektiv (bzw. projektiv) über k, so gilt dasselbe für X' und π ist ein projektiver Morphismus.

Beweis. siehe Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Proposition II.7.16.

QED.

1.6.9 Birationale Morphismen von quasi-projektiven Varietäten und Aufblasungen

Sei f: $X' \longrightarrow X$ ein birationaler Morphismus von algebraischen Varietäten. Wir nehmen an, X ist quasi-projektiv. Dann gibt es ein lokal abgeschlossenenes Teilschema

$$Z \hookrightarrow X$$

[8] vgl. Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Proposition II. 4.10 und die nachfolgende Definition.

von X derart, daß π bis auf Isomorphie gerade die Aufblasung π von X mit dem Zentrum Z ist,

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\cong} & Bl_Z(X) \\ f\downarrow & & \downarrow\pi \\ X & = & X \end{array}$$

Beweis. siehe Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Theorem II.7.17.
QED.

1.7 Lokale Aufblasungen

1.7.1 Lokale Aufblasungen und deren affine Umgebungen

Seien π: X' $\longrightarrow$ X eine Aufblasung des Schemas X mit dem Zentrum

$$Y := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/I_Y,$$

$$x \in X$$

ein Punkt, $x'\in\pi^{-1}(x)$ ein über x liegender Punkt und

$$(R, M) \text{ bzw. } (R', M')$$

die lokalen Ringe von X bzw. X' in x bzw. x'. Dann induziert π einen lokalen Homomorphismus lokaler Ringe

$$\pi_x^{\#}: \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X',x'} .$$

Ein lokaler Homomorphismus dieser Gestalt heißt lokale Aufblasung. Mit anderen Worten (vgl. 1.6.3), eine <u>lokale Aufblasung</u> ist ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe der Gestalt

$$f: R \longrightarrow R[\tfrac{I}{t}]_P$$

mit einem lokalen Ring (R, M), einem Ideal $I \subseteq R$, einem Element $t \in I - \{0\}$ und einem Primideal

$$P \subseteq R[\tfrac{I}{t}] \qquad (\subseteq R_t),$$

dessen vollständiges Urbild in R gerade das maximale Ideal M von R ist. Das Ideal I heißt <u>Zentrum</u> der lokalen Aufblasung. Die lokale Aufblasung heißt <u>equidimensional</u>, wenn

$$\dim R = \dim R'$$

gilt.
Eine <u>lokale monoidale Transformation</u> ist eine equidimensionale lokale Aufblasung, deren Zentrum I ein reguläres Primideal ist, d.h. R/I ist ein regulärer lokaler Ring.
Eine <u>lokale quadratische Transformation</u> ist eine equidimensionale lokale Aufblasung, deren Zentrum das maximale Ideal ist.

Bemerkungen

(i) Der Morphismus π hat lokal in einer Umgebung des gegebenen Punktes x' die Gestalt

$$\operatorname{Spec} A[\tfrac{I}{t}] \longrightarrow \operatorname{Spec} A, \qquad (1)$$

wobei A den Koordinatenring einer affinen Umgebung des Bild-Punktes x von x' bezeichne, $I \subseteq A$ das Ideal des Zentrums der Aufblasung π, $t \in I - \{0\}$ ein Element mit der Eigenschaft, daß x' in der offenen Hauptmenge $D(t) \subseteq$ Proj

$\oplus_{i=0}^{\infty} I^i$ liegt. Der Morphismus (1) wird dabei gerade vom natürlichen Homomorphismus

$$A \longrightarrow A' = A[\frac{I}{t}] \tag{2}$$

induziert. Bezeichne

$$P \subseteq A[\frac{I}{t}] \text{ und } Q \subseteq A$$

die zu den Punkten x' bzw. x gehörigen Primideale. Dann ist

$$Q = A \cap P$$

gerade das vollständige Urbild von P und der auf den Lokalisierungen induzierte Homomorphismus

$$A_Q \longrightarrow A[\frac{I}{t}]_P \tag{3}$$

ist gerade die oben beschriebene lokale Aufblasung (vgl. den Beweis von 1.6.3). Ein Homomorphismus von Ringen mit Eins der Gestalt (2) mit der Eigenschaft, daß (3) gerade die gegebene lokale Aufblasung ist, heißt deshalb auch <u>affine Umgebung</u> dieser lokalen Aufblasung.

(ii) Ist $\{t_\alpha\}$ ein Erzeugendensystem des Ideals I, welches in Spec A das Zentrum der Aufblasung definiert, so kann man stets eine affine Umgebung (2) der gegebenen lokalen Aufblasung finden mit

$$t = t_\alpha$$

für ein α.

(iii) Das Ideal des Ausnahme-Divisors in der gegebenen affinen Umgebung

$$\text{Spec } A' = \text{Spec } A[\frac{I}{t}]$$

ist gleich

$$I \cdot A' = t \cdot A'.$$

Für jede nicht-negative ganze Zahl i gilt

$$I^i \cdot A' \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I^{i+j} : t^j \tag{4}$$

(iv) Liegt der Punkt x' nicht auf dem Ausnahme-Divisor, so ist die lokale Aufblasung

$$R \longrightarrow R'$$

ein Isomorphismus.

Beweis <u>Zu (ii)</u>. Die Einschränkung der Aufblasung π: X' $\longrightarrow$ X auf die affine Umgebung U := Spec A des Punktes x hat die Gestalt

$$\text{Proj } \oplus_{i=0}^{\infty} I^i = \pi^{-1}(U) \longrightarrow U = \text{Spec } A.$$

Für jeden Punkt $P \in \pi^{-1}(U)$ gilt $I \not\subseteq P$. Da jedes Element von I eine R-Linearkombination der t_α ist, können die t_α nicht sämtlich in P liegen, d.h. es gilt

$$t_\alpha \notin P$$

für ein α, d.h.

$$P \in D(t_\alpha) = \text{Spec } A[\frac{I}{t_\alpha}].$$

Ist P gerade der gegebene Punkt x', so erhalten wir die Behauptung.

Zu (iii). Wir haben (4) zu beweisen.

Beweis von '$\supseteq$'. Für $x \in I^{i+j}:t^j$ gilt $x \cdot t^j \in I^{i+j}$, also in A'

$$x \cdot t^j \in I^{i+j}A' = t^{i+j}A'.$$

Es gibt ein $y \in A'$ mit $x \cdot t^j = y \cdot t^{i+j}$. Da t in A' ein reguläres Element ist, folgt

$$x = y \cdot t^i \in t^i A' = I^i A'.$$

Das Element x von A liegt somit in der linken Seite von (4).

Beweis von '$\subseteq$'. Sei x ein Element von A, welches in das Ideal $I^i \cdot A' = t^i \cdot A'$ abgebildet wird. Dann gilt in A':

$$x = t^i \cdot \frac{u}{t^j}$$

mit einer natürlichen Zahl j und $u \in I^j$. Die Differenz $x \cdot t^j - t^i \cdot u$ wird also von einer t-Potenz annulliert. Indem wir den Bruch $\frac{u}{t^j}$ geeignet mit einer t-Potenz erweitern, erreichen wir

$$x \cdot t^j = t^i \cdot u \in I^{i+j}.$$

Es folgt, $x \in I^{i+j}:t^j$, d.h. x liegt in der rechten Seite von (4).

Zu (iv). Seien $A \longrightarrow A[\frac{I}{t}]$ eine affine Umgebung der gegebenen lokalen Aufblasung,

$$P \subseteq A[\tfrac{I}{t}] \text{ und } Q \subseteq A$$

die den Punkten x' bzw. x entsprechenden Primideale und

$$f: R = A_Q \longrightarrow R' = A[\tfrac{I}{t}]_P$$

die lokale Aufblasung. Das Ideal des Ausnahme-Divisors in der affinen Umgebung Spec $A[\frac{I}{t}]$ von x' ist gerade

$$I \cdot A[\tfrac{I}{t}] = t \cdot A[\tfrac{I}{t}].$$

Weil P nicht auf dem Ausnahme-Divisor liegt, gilt $t \notin P$, also auch $t \notin P \cap A = Q$. Also ist t in $R = A_Q$ eine Einheit. Es folgt $R[\frac{I}{t}] = R[I] = R$ und $R[\frac{I}{t}]_P = R$, d.h. die lokale Aufblasung $f: R \longrightarrow R[\frac{I}{t}]_P$ ist ein Isomorphismus (wies dies nach 1.6.5 auch sein sollte).

QED.

1.7.2 Die strikte Transformierte eines Ideals

Seien

$$A \longrightarrow A[\tfrac{I}{t}] \tag{1}$$

die affine Umgebung einer lokalen Aufblasung und $J \subseteq A$ ein Ideal. Wir setzen

$\overline{A} := A/J$
$\overline{I} := I \cdot \overline{A}$
$\overline{t} := t \bmod J$

Dann ist der induzierte Homomorphismus

$\overline{A} \longrightarrow \overline{A}[\overline{I}/\overline{t}]$

affine Umgebung der lokalen Aufblasung des Teilschemas Spec $\overline{A}$ von Spec A, welches durch das Ideal J definiert ist. Nach 1.6.8 ist das Schema Spec $\overline{A}[\overline{I}/\overline{t}]$ ein Teilschema von Spec $A[\frac{I}{t}]$, nämlich die strikte Transformierte von Spec $\overline{A}$ entlang der Aufblasung von Spec A mit dem Zentrum Spec A/I. Das Ideal

$$J' := \mathrm{Ker}(A[\tfrac{I}{t}] \longrightarrow \overline{A}[\overline{I}/\overline{t}])$$

dieses Teilschemas heißt strikte Transformierte von J entlang (1). Ist

$$R \longrightarrow R' := R[\tfrac{I}{t}]_P$$

eine lokale Aufblasung mit der affinen Umgebung (1), so heißt $J'\bullet\mathbb{R}'$ <u>strikte Transformierte</u> von $J\bullet R$ und J' heißt <u>affine Umgebung</u> der strikten Transformeirten von $J\bullet R$.

1.7.3 Berechnung der strikten Transformierten

(i) Seien $R \longrightarrow R' := R[\frac{I}{t}]_P$ eine lokale Aufblasung, $J \subseteq R$ ein Ideal und J' die strikte Transfomrierte von J. Dann gilt

$$J' = J\bullet R' : t^\infty := \bigcup_{i=1}^{\infty} J\bullet R' : t^i.$$

Ist R' ein noetherscher Ring, so bedeutet dies

$J' = J\bullet R' : t^i$ für ein hinreichend groß gewähltes i.

(ii) Seien $A \longrightarrow A' := A[\frac{I}{t}]$ die affine Umgebung einer lokalen Aufblasung, $J \subseteq A$ ein Ideal und J' die strikte Transfomrierte von J. Dann gilt

$$J' = J\bullet A' : t^\infty := \bigcup_{i=1}^{\infty} J\bullet A' : t^i.$$

Ist A' ein noetherscher Ring, so bedeutet dies

$J' = J\bullet A' : t^i$ für ein hinreichend groß gewähltes i.

(iii) Spezialfall:

R sei ein regulärer lokaler Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal, für welches R/I ebenfalls regulär ist. Weiter sei

$$J := fR$$

ein Hauptideal.

Dann ist auch die strikte Transformierte von J ein Hauptideal,

$$J' := f'R' \text{ mit } f' := f/t^n \text{ und } n := \mathrm{ord}_I(f), \text{ d.h. } f \in I^n - I^{n+1}$$

Außerdem ist dann auch R' ein regulärer lokaler Ring und t ein regulärer Parameter (d.h. Teil eines regulären Parametersystems von R').

Beweis. <u>Zu (ii)</u>.

Es gilt

$$\overline{A}[\overline{I}/\overline{t}] \subseteq \overline{A}_{\overline{t}} = A_t/JA_t$$

$$\overline{A}[\overline{I}/\overline{t}] = A[\tfrac{I}{t}] + JA_t/JA_t \cong A[\tfrac{I}{t}] \,/\, A[\tfrac{I}{t}] \cap JA_t$$

also

$$J' = A[\tfrac{I}{t}] \cap JA_t = \bigcup_{i=1}^{\infty} J\bullet A[\tfrac{I}{t}] : t^i$$

$$J' = J\bullet A[\tfrac{I}{t}] : t^\infty$$

Man beachte, im noetherschen Fall bedeutet die letzte Identität

$$J' = J\bullet A[\frac{I}{t}] : t^i$$ für ein hinreichend groß gewähltes i.

Zu (i) Ergibt sich aus der gerade durchgeführten Rechung durch Übergang zu den Lokalisierungen.
Zu (iii). Nach Voraussetzung ist der Ring R insbesondere noethersch.

Wir können annehmen, daß I ein echtes Ideal von R ist, denn andernfalls gilt R' = R und man kann t = 1 annehmen, d.h. es ist J' = J, und die zu beweisenden Aussagen sind trivial.

Da t ein reguläres Element des Teilrings R' von R_t, gilt

$$\dim R'/tR' = \dim R' - 1.$$

Der Faktorring R'/tR' ist ein lokaler Ring des Ausnahme-Divisors

$$\mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1} \qquad (2)$$

der gegebenen Aufblasung. Weil R/I nach Voraussetzung ein regulärer lokaler Ring ist, wir I von einer regulären Sequenz erzeugt. Der Ring

$$\oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1} \cong (R/I)[T_1,..., T_s]$$

ist isomorph zu einem Polynomring über R/I, wobei die Anzahl s der Unbestimmten T_i gerade die Länge der erzeugenden regulären Sequenz ist.
Nun ist R' der lokale Ring eines Punktes, der über M liegt, wenn M das maximale Ideal von R bezeichnet. Also ist R'/tR' lokaler Ring eines Punktes von (2) der über M/I liegt.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1} & \hookrightarrow & \mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} I^i \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ R/M & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}\ R/I & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}\ R \end{array}$$

Deshalb ist R'/tR' ein lokaler Ring von $f^{-1}(M) = \mathrm{Proj}\ (R/M)[T_1,..., T_s]$, d.h. ein nicht-singulären Schemas, d.h. R'/tR' ist ein regulärer lokaler Ring, d.h. das maximale Ideal von R'/tR wird von

$$\mu(m(R'/tR')) = \dim R'/tR'$$

Elementen erzeugt. Wir wählen Repräsentanten in m(R') der Erzeuger von

$$m(R'/tR') = m(R')/tR'.$$

Zusammen mit t erzeugen diese das maximale Ideal von R', d.h.

$$\mu(m(R')) \le \mu(m(R'/tR)) + 1 = \dim R'/tR' + 1 = \dim R'.$$

Also ist auch R' ein regulär lokaler Ring, und t ist ein regulärer Parameter von R'.

Wir haben noch zu zeigen, die strikte Transformierte J' von J := fR ist gleich

$$J' = f'R'.$$

1. Fall: t ist ein regulärer Parameter des lokalen regulären Rings R.
Wegen $f \in I^n - I^{n+1}$ gilt in R':

$$f \in I^n\bullet R' = t^n\bullet R',$$

also

$$f' := f/t^n \in R'$$

also

$$f'R' \subseteq f\bullet R':t^n \subseteq J'.$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein Element

$$x \in J'.$$

Nach Aussage 1.7.3 (ii) gibt es eine natürliche Zahl i mit

$$x \cdot t^i = f \cdot y \ , \ y \in R', \ y = \frac{u}{t^j}, \ u \in I^j,$$

d.h.

$$x \cdot t^{i+j} = f \cdot u = f' \cdot ut^n \text{ in } R'.$$

Durch Erweiterung des Bruches y mit t-Potenzen erreichen wir, daß außerdem

$$j \geq n$$

gilt.

Nun ist R' ein regulärer lokaler Ring, also insbesondere ein ZPE-Ring. Außerdem ist t als regulärer Parameter in R' ein Primelement. Es reicht deshalt, zu zeigen,

$$f \in t^n R' - t^{n+1} R', \tag{3}$$

denn dann ist f' teilerfremd zu t und ut^n ein Vielfaches von t^{i+j}. Wir können t^{i+j} kürzen, und erhalten

$$x \in f'R'.$$

Wir haben noch zu zeigen, f liegt nicht in $t^{n+1}R' = I^{n+1}R'$. Angenommen, dies wäre doch der Fall,

$$f \in I^{n+1}R'.$$

Aus Formel (4) von Bemerkung 1.7.1 (ii) erhält man durch Übergang zu den Lokalisierungen die Existenz einer t-Potenz t^j mit

$$f \cdot t^j \in I^{n+1+j}. \tag{4}$$

Nach Voraussetzung ist t ein lokaler Parameter des regulären lokalen Rings R. Wir wählen ein Erzeugendensystem von I, welches ein Teilsystem eines lokalen Parametersystems ist und in welchem t vorkommt und betrachten den zugehörigen graduierten Ring bezüglich der Potenzen des Ideals I von R. Dieser Ring ist isomorph zu einem Polynomring,

$$gr_I(R) \cong (R/I)[X_1, \dots, X_d],$$

wobei die Anfangsform von t gerade einer der Unbestimmten enspricht, sagen wir

$$in(t) = X_1$$

Wegen $f \in I^n - I^{n+1}$ entspricht $in(f) = f + I^{n+1}$ einem Polynom n-ten Grades. Wegen (4) besteht in $gr_I(R)$ die Identität

$$in(f) \cdot X_1^j = f \cdot t^j + I^{n+1+j} = 0.$$

Als Polynomring über dem Integritätsbereich R/I ist $gr_I(R)$ nullteilerfrei, d.h. es gilt $in(f) = 0$, also $f \in I^{n+1}$ im Widerspruch zur Wahl von n. Dieser Widerpruch zeigt, f liegt nicht $I^{n+1}R'$. Die Behauptung ist damit im Fall, daß t ein regulärer Paramter von R ist, bewiesen.

<u>2. Fall</u>: $t \in I - \{0\}$ beliebig.

Weil R und R/I reguläre Ring sind, gibt es ein Erzeugendensystem von I,

$$I = (t_1, \dots, t_s),$$

welches Teilsystem eines regulären Parametersystem von R ist. Nach Bemerkung 1.7.1 (ii) gibt es ein i, so daß sich R' in der Gestalt

$$R' = R[\frac{I}{t_i}]_P$$

schreiben läßt mit einem Primideal P von $R[\frac{I}{t_i}]$. Auf Grund des ersten Fall hat die strikte Transformierte J' von J die Gestalt

$$J' = \frac{f}{t_i^n} R'.$$

Außerdem ist

$$t_i R' = I \bullet R' = t \bullet R',$$

d.h. $t_i = t \bullet e$ mit einer Einheit e von R'. Durch Einsetzen erhalten wir

$$J' = \frac{f}{t^n} \bullet e^{-n} \bullet R' = f' \bullet R'$$

wie behauptet.
QED.

1.7.4 Beispiel: monoidale Transformation eines regulären Rings der Dimension 3

Sei $R \longrightarrow R' := R[\frac{I}{t}]_P$ eine lokale Aufblasung mit R regulär und dim R = dim R' = 3.

Weiter sei das Zentrum $I := P \subseteq R$ ein Primideal mit R/P regulär.
<u>1. Fall</u>: dim R/P = 1.
Wir fixieren ein reguläres Parametersystem

$$x_1, x_2, x_3 \in R \text{ mit } I = P = (x_1, x_2) \text{ und } t = x_1.$$

Dann ist

$$R'/IR' = R'/x_1R'$$

isomorph zu einem lokalen Ring von

$$\mathrm{Proj} \oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1} \cong (R/I)[X_1, X_2],$$

wobei X_i für die Anfangsform von x_i steht (i = 1, 2), und

$$R'/M(R)R' = R'/(x_1, x_3)R'$$

ist isomorph zu einem lokalen Ring von

$$\mathrm{Proj}\ (R/M(R))[X_1, X_2],$$

genauer zu einer Lokalisierung von

$$(R/M(R))[X_2/X_1]$$

bezüglich eines Primideals, welches wie jedes Ideal dieses Rings ein Hauptideal ist. Bezeichne

$$\overline{p} \in (R/M(R))[X_2/X_1]$$

einen Erzeuger dieses Primideals und

$$p(T) \in R[T]$$

einen Repräsentanten von $\overline{p}$. Dann ist

$$R'/(x_1,x_3, p(x_2/x_1))R'$$

ein Körper, d.h. es gilt

$$M(R') = (x_1,x_3, p(x_2/x_1))R'$$

ist das maximale Ideal von R' und

$$x_1,x_3, p(x_2/x_1)$$

ist ein reguläres Parametersystem von R'.
<u>2. Fall</u>: dim R/P = 0.
Wir fixieren ein reguläres Parametersystem

$$x_1, x_2, x_3 \in R \text{ mit } I = P = (x_1, x_2, x_3) = M(R) \text{ und } t = x_1.$$

Dann ist

$$R'/IR' = R'/x_1R'$$

isomorph zu einem lokalen Ring von

$$\mathrm{Proj}\ \oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1} \cong (R/I)[X_1, X_2, X_3],$$

wobei X_i für die Anfangsform von x_i steht (i = 1, 2, 3), und

$$R'/M(R)R' = R'/(x_1)R'$$

ist isomorph zu einem lokalen Ring von

$$\mathrm{Proj}\ (R/M(R))[X_1, X_2, X_3],$$

genauer zu einer Lokalisierung von

$$(R/M(R))[X_2/X_1, X_3/X_1]$$

bezüglich eines Primideals, welches sogar maximal in diesem 2-dimensionalen Polynomring ist. Der Faktorring nach diesem Primideal ist eine algebraische Körpererweiterung von R/M(R) und entsteht durch Zusammensetzung von zwei einfachen algebraischen Körpererweiterungen, nämlich durch Adjunktion der Restklasse von X_2/X_1 gefolgt von der Adjunktion der Restklasse von X_3/X_1. Das Primideal wird von zwei Polynomen erzeugt, nämlich dem Minimalpolynom $\overline{p}_1$ der Restklasse von X_2/X_1 über R/M(R) und dem Minimalpolynom $\overline{p}_2$ der Restklasse von X_3/X_1 über dem von der Restklasse von X_2/X_1 erzeugten Teilkörper. Damit können wir schreiben

$$M(R') = (x_1, p_1(X_2/X_1), p_2(X_2/X_1, X_3/X_1))R'.$$

Dabei bezeichne

$$p_1 \in (R/M(R))[X_2/X_1]$$

einen Repräsentanten von $\overline{p}_1$ und

$$p_2 \in (R/M(R))[X_2/X_1, X_3/X_1]$$

einen Repräsentanten von $\overline{p}_2$. Insbesondere ist

$$x_1, p_1(X_2/X_1), p_2(X_2/X_1, X_3/X_1)$$

ein reguläres Parametersystem von R'.

1.7.5 Beispiel: die strikte Transformierte eines Divisors im Fall eines Zentrums der Kodimension 2 (FEHLER !!!)

Sei $R \longrightarrow R' := R[\frac{I}{t}]_P$ eine lokale Aufblasung mit R regulär und dim R = dim R'. Das Zentrum $I := P \subseteq R$ sei ein Primideal der Höhe 2 mit R/P regulär.

Weiter seien

J := fR ein von Null verschiedenes Hauptideal.

J' := f'R' die strikte Transformierte von J.

Behauptung:

Im Fall $\mathrm{ord}_R(f) = \mathrm{ord}_{R'}(f') > 0$ ist die lokale Aufblasung $R \longrightarrow R'$ eindeutig bestimmt und <u>residual rational</u>, d.h. die induzierte Abbildung $R/M(R) \longrightarrow R'/M(R')$ der Restklassenkörper ist ein Isomorphismus.

(siehe [CGO1984] im Beitrag von Orbanz, I.§4 Some special results, letzter Abschnitt, S.9)

Zum **Beweis**.
Wir setzen

$n := \mathrm{ord}_R(f)$

$P := (x, y)R$

Dann gilt

$\mathrm{gr}_P(R) \cong (R/P)[X, Y]$

$\mathrm{gr}_P(R)\otimes_R R/M(R) \cong (R/M(P))\,[X,Y]$

$R'/M(R)R' \cong (R/M(P))\,[X,Y]_{(Q)}$

mit einem relevanten homogenen Primideal Q von (R/M(P)) [X,Y].

Seien $\mathrm{in}_P(f)$ die Anfangsform von f in $\mathrm{gr}_P(R)$ und g deren Restklasse in

$$\mathrm{gr}_P(R)\otimes_R R/M(R).$$

Behauptung:
Dann ist g homogen vom Grad ≤ n und $\mathrm{ord}_{R'}(f') = n$ implisiert, daß g in der n-ten Potenz des maximalen Ideals von R'/M(R)R' liegen muß.

Das Argument funktioniert nicht, weil g identisch Null sein kann (und es im allgemeinen auch ist).

Möglichkeit ????: man setze die normale Flachheit entlang P voraus und betrachte anstelle der Surjektion

$$\mathrm{gr}_P(R) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_P(R)\otimes_R R/M(R)$$

den Hironaka-Grothendieck-Isomorphismus. Man erhält dann, daß die Anfangsform von f' in $\mathrm{gr}_{M(R')}(R')$ in einer affinen Umgebung ein Polynom n-ten Grades in den Parametern von R' ist.

2. Auflösung der Singularitäten von ebenen Kurven

Bezeichne (R, M, k) einen 2-dimesionalen regulären lokalen Ring.

2.1 Die gewichtete Anfangsform bezüglich eines regulären Parametersystems

2.1.1 Proposition

Seien (R, M, k) ein regulärer lokaler Ring,

$$x, y \in R$$

ein reguläres Parametersystem und v, w, e ∈ ℝ positive reelle Zahlen. Weiter seien Elemente

$$a_{ij} \in R \;(0 \le i,j \le n)$$

gegeben mit

$$\sum_{iv+jw = e} a_{ij}x^iy^j = \sum_{iv+jw > e} a_{ij}x^iy^j$$

Dann gilt

$$a_{ij} \in M \text{ für beliebige } (i, j) \text{ mit } iv + jw = e.$$

Beweis. siehe Poposition 1, Orbanz, U.: Embedded resolution of algebraic surfaces after Abhyankar, Lecture Notes in Math.1101 (1984), 1-50.

Wir führen Bezeichnungen für die beiden Seiten der gegebenen Identität ein, wobei wir die beiden Parameter x, y durch Unbestimmte X, Y ersetzen. Seien

$$F(X,Y) := \sum_{iv+jw = e} a_{ij}X^iY^j \tag{1}$$

$$G(X,Y) := \sum_{iv+jw > e} a_{ij}X^iY^j \tag{2}$$

Liegt eines der a_{ij} in M, sagen wir $a_{ij} = ax + by$, so gilt $a_{ij}x^iy^j = ax^{i+1}y^j + bx^iy^{j+1}$, d.h. wir können das Glied $a_{ij}x^iy$ durch eine Summe von Gliedern höheren Grades ersetzen und so aus dern Summe entfernen. Zum Beweis der Behauptung können wir deshalb zusätzlich annehmen,

$$\text{Für jedes Paar (i,j) mit } av + jw = e \text{ gilt } a_{ij}=0 \text{ oder } a_{ij} \text{ Einheit in R.} \tag{3}$$

Wir setzen

$$s(j) \quad := \frac{e}{v} - j\bullet\frac{w}{v}.$$

Dann können wir (1) auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$F(X, Y) = \sum_{t=1}^{d} c(t)\bullet X^{s(t)}Y^t \tag{4}$$

wobei entsprechend gilt

$$\text{Jedes von 0 verschiedene } c(t) \text{ ist eine Einheit von R} \tag{5}$$

Wir haben zu zeigen F(X, Y) ist das Null-Polynom. Zum Beweis nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall und wählen die Zahl d in (4) derart, daß

$$c(d) \neq 0$$

gilt. Wir setzen

$$F_0(X, Y) := F(X, Z) - c(d)\bullet X^{s(d)}Y^d = \sum_{t=1}^{d-1} c(t)\bullet X^{s(t)}Y^t \tag{6}$$

und schreiben

$$G(X, Y) = G_1(X, Y) + G_2(X, Y) \tag{7}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} G_1(X,Y) &= \sum_{iv+jw>e,j\le d} a_{ij}X^iY^j \\ G_2(X,Y) &= \sum_{iv+jw>e,d<j} a_{ij}X^iY^j \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Wir können dann aus $G_2(X, Y)$ die (d+1)-te Potenz von Y ausklammern, sagen wir

$$G_2(X, Y) = Y^{d+1}\bullet H(X, Y)$$

und schreiben

$$c(d)\bullet x^{s(d)}y^d - y^{d+1}\bullet H(x, y) = G_1(x,y) - F_0(x, y). \tag{9}$$

Es gilt[9]

$$\left.\begin{array}{l} s(t) > s(d) \text{ für } t < d \text{ und} \\ j \le d \text{ und } iv+jw > e \text{ impliziert } i > s(d) \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Aus der ersten Aussage von (10) folgt nach Definition von $F_0(X, Y)$, daß gilt

$$F_0(x, y) \in x^{s(d)+1}R.$$

Aus der zweiten Aussage von (10) folgt nach Definition von $G_1(X, Y)$, daß gilt

$$G_1(x, y) \in x^{s(d)+1}R.$$

Aus den letzten beiden Aussagen ergibt sich zusammen mit (9)

$$y^d \cdot (c(d) \cdot x^{s(d)} - y \cdot H(x,y)) \in x^{s(d)+1}R.$$

Weil x und y ein reguläres Parametersystem bilden, folgt

$$c(d) \cdot x^{s(d)} - y \cdot H(x,y) \in x^{s(d)+1}R,$$

d.h. es gibt ein $r \in R$ mit

$$(c(d) - r \cdot x) \cdot x^{s(d)} - H(x,y) \cdot y = 0.$$

Weil x und y ein reguläres Parametersystem bilden, folgt

$$c(d) - r \cdot x \in yR.$$

Insbesondere ist $c(d) \in (x, y)R$ eine Nicht-Einheit, im Widerspruch zu (5) und der Annahme, daß c(d) von Null verschieden ist.
QED.

Bemerkung
Der Beweis zeigt, daß die obige Aussage gültig bleibt, wenn man x, y durch eine beliebige reguläre Sequenz der Länge 2 ersetzt und M durch das Ideal, welches von dieser Sequenz erzeugt wird.

2.1.2 Die Menge V(x,y; f) der gewichteten Grade eines Elements

Seien (R, M, k) ein regulärer lokaler Ring,

$$x, y \in R$$

ein reguläres Parametersystem, und $f \in R - \{0\}$ ein von Null verschiedenes Element der Ordnung

$$n := \mathrm{ord}_M(f).$$

Wir setzen

$$\begin{array}{ll} V(x, y; f) & := \{v \in \mathbb{R} \mid 1 \le v \text{ und } f = \sum_{iv+j \ge nv} a_{ij} x^i y^j \text{ mit } a_{ij} \in R\} \\ v(x, f) & := \sup V(x, y; f). \\ v(f) & := \sup \{v(x, f) \mid x \in M - M^2\} \end{array}$$

---

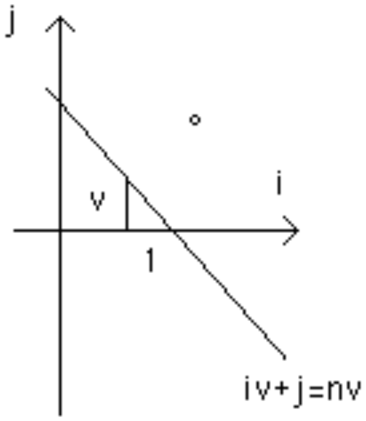
[9] Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß s(t) streng monoton fallend bezüglich t ist. Hinsichtlich der zweiten Aussage beachte man, mit

$$iv + jw > e$$

gilt wegen $s(j)v + jw = e$ stets

$$i > s(j) \ge s(d),$$

wobei die Abschätzung rechts aus der Monotonie von s(t) und $j \le d$ folgt.



Der Wert v>0 ist so zu wählen, daß alle (i,j) mit $a_{ij} \neq 0$ sich rechts oberhalb der Geraden befinden. Beim Vergrößern von v wird der (negative) Anstieg der Geraden größer. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Abzisse ist für alle Werte von v gleich (n,0).

2.1.3 Eigenschaften von V(x, y; f), v(x, f) und v(f)

Seien (R, M, k) ein regulärer lokaler Ring,

$$x, y \in R$$

ein reguläres Parametersystem, und $f \in R - \{0\}$ ein von Null verschiedenes Element der Ordnung

$$n := \mathrm{ord}_M(f).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $v(x, f) \in \frac{1}{n!}\mathbb{Z} \bigcup \{\infty\}$.

(ii) $v(f) \in \frac{1}{n!}\mathbb{Z} \bigcup \{\infty\}$.

(iii) V(x, y; f) hängt nicht von der speziellen Wahl von y ab.

(iv) $v(x, x^{\ell}) = \infty$ für jedes $\ell \geq n$.

(v) $v(x, f) = \infty \Leftrightarrow f \in x^n R$.

(vi) V(x,y;f) ändert sich nicht, wenn man den Ring R durch dessen Vervollständigung $\hat{R}$ ersetzt (d.h. x, y als Parametersysten von $\hat{R}$ und f als Element von $\hat{R}$ betrachtet).
Insbesondere ändern sich auch v(x; f) und v(f) nicht, wenn man zur Vervollständigung von R übergeht.

Beweis. Zu (i). Sei $v \in V(x,y; f)$. Wir schreiben f in der Gestalt

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij}x^i y^j \text{ mit } a_{ij} \in R.$$

Mit $w := \min \{\frac{j}{n-i} \mid a_{ij} \neq 0\}$ gilt für alle (i,j) mit $a_{ij} \neq 0$:

$$w \leq \frac{j}{n-i},$$

d.h.

$$(n-i)w \leq j$$

d.h.

$$iw + j \geq nw.$$

Deshalb liegt w ebenfalls in V(x,y;f). Wir haben gezeigt, für jedes $v \in V(x, y; f)$ gibt es ein $w \in V(x, y; f)$ mit $w \in \frac{1}{n!}\mathbb{Z}$. Das Supremum von V(x, y; f) hat damit die behauptete Eigenschaft.

Zu (ii). Folgt unmittelbar aus (i) und der Definition von v(f).

Zu (iii). Sei y' ein weiteres Element von R derart, daß auch x, y' ein reguläres Parametersystem von R ist. Dann gilt

$$y = ax + by' \text{ mit } a, b \in R.$$

Außerdem ist b eine Einheit, denn andernfalls wäre $M = Rx + Ry \subseteq Rx + M$, d.h. $M = xR$, was nicht möglich ist, denn R soll ein 2-dimensionaler regulärer lokaler Ring sein. Sei jetzt

$$v \in V(x, y; f).$$

Dann läßt sich f in der Gestalt

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij}x^iy^j \text{ mit } a_{ij} \in R$$

schreiben. Wir setzen für y den Wert ax + by' ein und erhalten eine Darstellung für f von der Gestalt

$$f = \sum_{r,s} b_{rs}x^ry'^s \text{ mit } a_{ij} \in R.$$

Dabei entsteht jedes $b_{rs} \neq 0$ aus gewissen $a_{ij}x^iy^j$ mit $a_{ij} \neq 0$ durch die Substitution $y = ax + by'$, d.h. es gilt

$$(r,s) \in \{(i + j-k, k) \mid iv+j \geq nv \text{ und } j \geq k \}.$$

Mit geeignet gewählten (i, j) folgt

$$rv + s = (i+j-k)v + k = iv + j + (v-1)(j-k) \geq nv.$$

Die letzte Ungleichheit rechts besteht, weil $v \geq 1$ und $j \geq k$ gilt. Es gilt also

$$v \in V(x, y'; f).$$

Wir haben gezeigt, $V(x,y; f) \subseteq V(x, y'; f)$. Aus Symmetriegründen besteht auch die umgekehrte Inklusion.

Zu (iv). Im Fall $f = x^\ell$ haben wir für jedes $v \geq 1$ eine Darstellung der Gestalt

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij}x^iy^j$$

wobei die Summe rechts aus nur einem von Null verschiedenen Summanden besteht, nämlich aus dem Summanden zum Index-Paar $(\ell, 0)$. Die Menge V(x, y; f) enthält also alle reellen Zahlen ≥ 1. Ihr Supremum ist somit ∞.

Zu (v). Sei $f \in x^nR$. Wie wir gerade gesehen haben, hat x^n für jedes reelle $v \geq 1$ eine Darstellung der Gestalt

$$x^n = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij}x^iy^j$$

Durch Multiplikation mit mit einem $r \in R$ erhalten wir eine analoge Darstellung

$$rx^n = \sum_{iv+j \geq nv} ra_{ij}x^iy^j$$

Dabei können wir r so wählen, daß auf der linken Seite f steht. Damit enthält V(x, y; f) alle reellen Zahlen ≥ 1. Das Supremum ist somit ∞.

Sei jetzt umgekehrt $v(x, f) = \infty$. Für jedes ganzzahlige $v \geq 1$ ist dann f eine R-Linearkombination von Gliedern der Gestalt

$$x^i y^j \text{ mit } iv+j \geq nv.$$

Im Fall $i \geq n$ liegt dieses Glied in $x^n R$. Im Fall $i < n$ gilt $j \geq (n-i)v \geq v$, d.h. das Glied liegt in M^v. Zusammen erhalten wir für die Linearkombination

$$f \in x^n R + M^v.$$

Da dies für jede natüliche Zahl v gilt, folgt $f \in x^n R$.

Zu (vi). Bezeichne $\hat{V}(x, y; f)$ die zu $\hat{R}$ gehörige Menge $V(x, y; f)$. Jede Darstellung von f der Gestalt

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij} x^i y^j \tag{1}$$

in R läßt sich als Darstellung in $\hat{R}$ auffassen. Deshalb gilt

$$V(x, y; f) \subseteq \hat{V}(x, y; f).$$

Sei jetzt $v \in \hat{V}(x, y; f)$ und (1) eine Darstellung von f in $\hat{R}$. Dann kann man für jede vorgegebene natürliche Zahl N jedes der Elemente $a_{ij} \in \hat{R}$ in der Gestalt

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \text{ mit } a_{ij} \in R \text{ und } c_{ij} \in m^N \hat{R}$$

schreiben. Es gilt dann

$$f - \sum_{iv+j \geq nv} b_{ij} x^i y^j \in m^N \hat{R} \cap R = m^N$$

Man kann also diese Differenz als Linearkombination von Potenzprodukten $x^i y^j$ mit Koeffizienten aus R schreiben mit $i + j = N$. Für $N \geq nv$ gilt dann aber auch $iv + j \geq nv$ (wegen $v \geq 1$), d.h. es gilt

$$v \in V(x, y; f).$$

QED.

2.1.4 Die gewichtete Anfangsform eines Elements

Seien (R, M, k) ein regulärer lokaler Ring,

$$x, y \in R$$

ein reguläres Parametersystem, und $f \in R - \{0\}$ ein von Null verschiedenes Element der Ordnung

$$n := \mathrm{ord}_M(f).$$

Sei weiter $v \in V(x, y;f)$, d.h. f habe die Gestalt

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij} x^i y^j.$$

Dann setzen wir

$$L(x, y; v)(f) := \sum_{iv+j = nv} \bar{a}_{ij} X^i Y^j \in k[X,Y].$$

Dabei seien X und Y Unbestimmte, und $\overline{a}_{ij}$ bezeichne das Bild von a_{ij} beim natürlichen Homomorphismus $R \longrightarrow R/M = k$.

2.1.5 Eigenschaften der Anfangsform L

(i) Die Definition von L(x,y, v)(f) ist korrekt, d.h. hängt nicht von der Wahl der Darstellung von f als Polynom in x und y mit Koeffizienten aus R ab.

(ii) Für jedes $w \in V(x,y; f)$ gilt

$$w < v(x, f) \Leftrightarrow L(x,y; w)(f) = \overline{a}\bullet X^n \text{ für ein } a \in R.$$

Dabei bezeichne n die Ordnung von f.

Beweis. Zu (i). Sei

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} b_{ij}x^iy^j$$

eine zweite Darstellung von f als Polynom in x und y mit Koeffizienten aus R. Wir bilden die Differenz der beiden Darstellungen und erhalten

$$\sum_{iv+j = nv} (a_{ij}-b_{ij})x^iy^j = \sum_{iv+j > nv} (b_{ij}-a_{ij})x^iy^j.$$

Nach Proposition 2.1.1 folgt

$$a_{ij}-b_{ij} \in M \text{ für alle } (i, j) \text{ mit } iv + j = nv,$$

also

$$\sum_{iv+j = nv} \overline{a}_{ij}X^iY^j = \sum_{iv+j = nv} \overline{b}_{ij}X^iY^j$$

Zu (ii). Seien $v := v(x,f)$ und

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij}x^iy^j$$

d.h.

$$f = \sum_{j \geq (n-i)v} a_{ij}x^iy^j$$

Im Fall $w < v$ gilt mit $j \geq (n-i)v$ auch

$$j \geq (n-i)w$$

Das ist klar für alle Glieder mit $n-i\geq 0$ und gilt für die übrigen Glieder weil links stets ein nicht-negativer Wert steht. Für diese letzteren Glieder ist die Ungleichung insbesondere sogar echt, und dasselbe gilt für alle Glieder mit $n-i > 0$. Die einzigen Glieder mit

$$j = (n-i)w$$

sind also diejenigen mit

$$i = n \text{ und } j = 0.$$

Die gegebene Darstellung von f liefert also auch eine entsprechende Darstellung mit w anstelle von v,

$$f = \sum_{j \geq (n-i)w} a_{ij}x^iy^j,$$

wobei höchstens ein Glied mit $j = (n-i)w$ auftritt, nämlich das Glied $a_{n0}x^n$ (falls es überhaupt auftritt). Nach Definition von L(x,y; w)(f) hat die Anfangsform dann die behauptete Gestalt.

Sei jetzt umgekehrt $w \in V(x,y; f)$ und

$$L(x,y, w)(f) = \bar{a}\bullet X^n \text{ für ein } a \in R.$$

Dann läßt sich f bei geeigneter Wahl von $a\in R$ in der folgenden Gestalt schreiben

$$f = aX^n + \sum_{j > (n-i)w} a_{ij}x^iy^j.$$

Wir setzen

$$u := \inf \{\frac{j}{n-i} \mid a_{ij} \neq 0 \text{ und } n-i > 0\}$$

Dann gilt für alle Paare (i, j) mit $j > (n-i)w$ auch

$$j \geq (n-i)u \qquad (1)$$

(im Fall $n-i > 0$ gilt dies nach Wahl von u und im anderen Fall, weil links stets eine nicht-negative ganze Zahl steht). Außerdem ist u nach Definition der größte Wert, so daß (1) gilt für die endlich vielen (i,j) mit $a_{ij} \neq 0$ und $i < n$. Für ein solches (i, j) gilt sogar das Gleichheitszeichen. Mit w anstelle von u ist das Gleichheitszeichen dagegen stets echt. Es gilt also

$$w < u \text{ und } f = aX^n + \sum_{j > (n-i)u} a_{ij}x^iy^j$$

Für den ersten Summanden aX^n, d.h. für $(i,j) = (n, 0)$ ist die Bedingung $j \geq (n-i)u$ erfüllt, d.h. es gilt

$$w < u \in V(x, y; f),$$

d.h. $w < u \leq \sup V(x, y; f) = v(x, f)$.
QED.

2.1.6 Ein Kriterium für v(x, f) = v(f)

Seien x, y ein reguläres Parametersystem des lokalen Rings (R, M,k) und

$$f \in R - \{0\}$$

ein von Null verschiedenes Element. Wir setzen

$$n = \text{ord } f \text{ und } v = v(x; f).$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $v(x; f) < v(f)$

(ii) Es gibt ein Element $a \in R$ und ein Polynom $G(X,Y) \in k[X,Y]$ mit

$$L(x,y;v)(f) = \bar{a}\bullet G(X,Y)^n$$

Beweis: siehe Poposition 2, p. 15, Orbanz, U.: Embedded resolution of algebraic surfaces after Abhyankar, Lecture Notes in Math.1101 (1984), 1-50.

Sei x', y' ein zweites System von regulären Parametern von R, und sei

$$v \in V(x', y', f).$$

Nach Definition von V(x',y', f) läßt sich f in der folgenden Gestalt schreiben.

$$f = ax'^n + \sum_{iv+j \geq nv, i<n} a_{ij}x'^iy'^j \text{ mit } a, a_{ij} \in R. \qquad (1)$$

Seien w eine natürliche Zahl, $b\in R$ und

$$x'' = x' - by'^w.$$

Dann erzeugen x" und y' das maximale Ideal von R, und es gilt

$$f = a(x'' + by'^{w})^n + \sum_{iv+j \geq nv, i<n} a_{ij} \cdot \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} b^k x''^{i-k} y'^{j+wk}. \tag{2}$$

Im Fall $w \leq v$ hat diese neue Darstellung dieselbe Gestalt wie die alte mit w anstelle von v, denn für $w \leq v$ und $i < n$ gilt

$$\begin{aligned} iv + j \geq nv \quad &\Leftrightarrow j \geq (n-i)\cdot v \\ &\Rightarrow j \geq (n-i)\cdot w \\ &\Leftrightarrow iw + j \geq nw \\ &\Leftrightarrow (i-k)w + (j+wk) \geq nw. \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz besteht wegen $(i-k)\cdot w + (j+wk) = i\cdot w + j$. Im Fall $w < v$ gilt in der obigen Abschätzung ab der zweiten Zeile sogar die echte Ungleichung. Deshalb können wir in diesem Fall bei der Berechnung der Anfangsform bezüglich des Parametersystems x'', y' die gesamte Summe rechts weglassen:

$$L(x'', y', w)(f) = L(x'', y', a(x'' + by'^{w})^n).$$

Weil $x'' + by'^{w}$ bezüglich des neuen Gewichts w homogen vom Grad w ist, folgt

$$L(x'', y', w)(f) = \bar{a}(X + \bar{b}Y^{w})^n. \tag{3}$$

Sind die Restklassen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ beide von Null verschieden, so hat $L(x'',y', w)(f)$ nicht die Gestalt von 2.1.5 (ii), d.h. es ist

$$v(x'', f) = w\ (< v) \text{ falls } \bar{a} \text{ und } \bar{b} \text{ ungleich Null sind.}$$

Wir haben damit die folgende Aussage bewiesen:

$$\begin{gathered} \text{Ist } f \text{ wie in (1) mit } a \notin M \text{ und } x'' = x' - bx^{w} \text{ mit } b \notin M, \\ \text{so besteht die Implikation } v(x'',f) \geq v \Rightarrow w \geq v \end{gathered} \tag{4}$$

Um den maximal möglichen Wert $v(f)$ für $v(x'', f)$ zu finden, reicht es also zu gegebenen v die Werte $w \geq v$ zu betrachten.

Schreiben wir (2) in der Gestalt

$$f = \sum_{iv+j \geq nv} a_{ij} \cdot \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} b^k x''^{i-k} y'^{j+wk}$$

mit $a_{n0} = a$. Verwenden wir diese Darstellung von f zur Bestimmung der Anfangsform von f bezüglich v (d.h. von $L(x'', y'; v)(f)$). Wir haben dafür die Glieder auf der rechten Seite mit

$$(i-k)v + (j+wk) = nv$$

zu finden. Im Fall $w = v$ ist letztere Bedingung äquivalent zu $iv + j = nv$, und im Fall $w > v$ muß $k = 0$ gelten[10], also auch $iv + j = nv$. Es gilt also

$$(i-k)v + (j+wk) = nv \Leftrightarrow \begin{cases} iv+j=nv \text{ und } k=0 & \text{falls } w > v \\ iv+j = nv & \text{falls } w = v \end{cases}$$

Für die Anfangsform erhalten wir damit

$$L(x'', y', v)(f) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{iv+j=nv} \bar{a}_{ij} X^i Y^j & \text{falls } w > v \\ \displaystyle\sum_{iv+j=nv} \bar{a}_{ij} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \bar{b}^k X^{i-k} Y^{j+kv} & \text{falls } w = v \end{cases} \tag{6}$$

Wir setzen

[10] Im Fall $k > 0$ wäre $nv = (i-k)v + (j+wk) > (i-k)v+j+vk = iv + j$. Glieder, die dieser Bedingung genügen, kommen in f aber nicht vor (vgl. (1)).

$$H(X,Y) := L(x', y', v)(f)$$

$$G(X,Y) := \begin{cases} X & \text{falls } w > v \\ X+\bar{b}Y^v & \text{falls } w = v \end{cases}$$

Dann bedeutet (6) gerade, es gilt

$$L(x'', y', v)(f) = H(G(X,Y), Y). \tag{7}$$

Speziell für v := v(x'; f) und w > v erhalten wir

$$L(x'', y'; v)(f) = H(X, Y) = L(x', y'; v)(f).$$

Die eine Anfangsform hat also genau dann die Gestalt wie auf der rechten Seite von 2.1.5(ii), wenn dies auch für die andere Anfangsform gilt. Nach 2.1.5(ii) besteht damit die Implikation

$$w > v(x'; f) \Rightarrow v(x'', f) = v(x', f) \tag{8}$$

QED.

2.1.7 Ein Kriterium für v(f) = ∞

Seien x, y ein reguläres Parametersystem des lokalen Rings (R, M,k) und

$$f \in R - \{0\}$$

ein von Null verschiedenes Element. Wir setzen

$$n = \text{ord } f.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $v(f) = \infty$.

(ii) Es gibt einen regulären Parameter z der Vervollständigung $\hat{R}$ von R mit

$$f\hat{R} = z^n\hat{R}.$$

Ist R ein exzellenter lokaler Ring, so sind diese Aussagen außerdem noch äquivalent zur folgenden.

(iii) Es gibt einen regulären Parameter z von R mit

$$fR = z^nR.$$

Beweis.siehe Poposition 3 und 3', p. 19, Orbanz, U.: Embedded resolution of algebraic surfaces after Abhyankar, Lecture Notes in Math.1101 (1984), 1-50.
QED.

2.1.8 Das Verhalten von v(f) bei Aufblasungen, die die Ordnung von f nicht ändern

Seien (R, M,k) ein regulärer lokaler Ring der Dimension 2 und

$$f \in R - \{0\}$$

ein von Null verschiedenes Element mit

$$0 < \text{ord}_R f \text{ und } v(f) < \infty.$$

Weiter sei R' ein über R liegender lokaler Ring derselben Dimension einer Aufblasung von Spec R im maximalen Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die strikte Transformierte f' von f in R' hat dieselbe Ordnung wie f,

$$\text{ord}_{R'} f' = \text{ord}_R f.$$

(ii) $0 < \text{ord}_{R'} f'$ und $v(f) \geq 2$.

In dieser Situation gilt

$$v(f') = v(f) - 1.$$

Ist x, y ein reguläres Parametersystem von R mit v(f) = v(x, f) so gilt außerdem in dieser Situation

$$v(f') = v(x', f') \text{ mit } x' := x/y \in M'.$$

Dabei bezeichne M' das maximale Ideal von R'.
Beweis. siehe Poposition 4, p. 19, Orbanz, U.: Embedded resolution of algebraic surfaces after Abhyankar, Lecture Notes in Math.1101 (1984), 1-50.
QED.

Literatur

[CGO1984] Cossart, V., Giraud, J., Orbanz, U.: Resolution of surface singularities, Lecture Notes in Math. 1101, Springer, Berlin 1984

[Ben1970] Bennett, B.M.: On the characteristik functions of a local ring, Ann. Math. 91 (1970), 25-87

[Ber1997] Berthelot, P.: Altérations de variétés algébriques d'apres A. J. de Jong, Séminaire Bourbaki, 1995-96, no. 815, Asterisque 241 (1997), 273-311.

[Har1977] Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Springer, Berlin1977

[Hau2003] Hauser, H.: The Hironaka theoream on resolution of singularities, Bull. Amer. Math. Soc. 40:3 (2003), 323-403

[Hi1964] Hironake, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety of a field of characteristik zero, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[Ko2007] Kollár, J.: Lectures on resolution of singularities, Princeton University Press, Princeton 2007

[Mat1970] Matsumura, H.: Commutative algebra, Benjamin, New York 1970

Index

Inhalt