Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 4 im Wintersementer 2020/21 (am 20.11.20)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

5. Die Zariki-Topologie

5.1 Vorbemerkungen

(i) Bei der Untersuchung der algebraischen Varietäten und damit auch der linearen algebraischen Gruppen spielen topologische Konstruktionen eine zentrale Rolle.

(ii) Zum Beispiel besagt eine der oben angeführten Definitionen des Begriffs der regulären Abbildung, daß die Koordinatenfunktionen

$$f\colon X \longrightarrow k$$

lokal durch Quotienten von Polynomen gegeben sein sollen, d.h. für jeden Punkt

$$p \in X$$

gibt es eine Umgebung U von p und Polynome r,s mit

$$f(x) = \frac{r(x)}{s(x)} \text{ für jedes } x \in U.$$

(iii) Die Definition benutzt den Begriff der Umgebung und damit den Begriff der offenen Menge. Sie ist nur sinnvoll, wenn X ein topologischer Raum ist.

(iv) Um algebraische Varietäten und insbesondere lineare algebraische Gruppen besser zu verstehen, müssen wir diese Mengen mit einer Topologie versehen und topologische Eigenschaften der resultierenden Räume kennen.

(v) Im Fall $k = \mathbb{C}$ bietet die Topologie des $\mathbb{C}^n$ die Möglichkeit, die affinen algebraischen Varietäten des $\mathbb{C}^n$ mit einer Topologie zu versehen. Für allgemeine Körper brauchen wir einen Ersatz für diese Topologie. In unserer Situation ist die sogenannte Zariki-Topologie ein vollwertiger Ersatz. Sehr oft lassen sich Beweise für Teilvarietäten des $\mathbb{C}^n$ sogar stark vereinfachen, wenn man die gewöhnliche Topologie durch die Zariski-Topologie ersetzt.

(vi) Die Zariski-Topologie hat ihre Mängel, und es sind sehr große Anstrengen unternommen worden, diese Mängel zu beseitigen. Diese haben zu einer Vielzahl von Topologien geführt, genauer zu einer Verallgemeinerung des Topologie-Begriffs und zu vielen Topologien im Sinne dieses verallgemeinerten Begriffs. Die Zariki-Topologie ist bei der Konstruktion dieser verallgemeinerten Topologien ein wichtiger Ausgangspunkt.

5.2 Die Zariski-Topologie des k^n

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper,

$$A := k[T] := k[T_1,\dots, T_n]$$

die k-Algebra der Polynome in den Unbestimmten $T_1,\dots, T_n$ und

$$I \subseteq A$$

ein Ideal von A. Wir setzen dann

$$V(I) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in I\}.$$

Dies ist eine affine algebraische Varietät im bisher definierten Sinne, weil jedes Ideal I von A endlich erzeugt ist, sagen wir

$$I = (f_1,...,f_m),$$

und damit

$$V(I) = V(f_1,...,f_m)$$

gilt: jede gemeinsame Nullstelle x der f_i ist auch eine Nullstelle der Linearkombinationen der f_i und damit eine gemeinsame Nullstelle der Elemente des von den f_i erzeugten Ideals. Die Verwendung von Idealen anstelle von deren Erzeugern hat den Vorteil, daß sich einige Eigenschaften der Mengen V(I) einfacher formulieren lassen. Es gilt

(i) $V(0) = k^n$ und $V(k[T]) = \emptyset$.

(ii) $V(I) \supseteq V(J)$ für Ideale I und J von k[T] mit $I \subseteq J$.

(iii) $V(I\cap J) = V(I\cdot J) = V(I)\cup V(J)$ für Ideale I und J von k[T].

(iv) $V(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ für jede Familie $\{I_\alpha\}$ von Idealen von k[T]

Aus (i), (iii) und (iv) liest man direkt ab, daß die Mengen der Gestalt V(I) die abgeschlossenen Mengen einer Topologie sind. Diese Topologie heißt <u>Zariski-Topologie</u> des k^n. Weitere Eigenschaften sind die folgenden

(v) $V(I) = V(\sqrt{I})$ für jedes Ideal von k[T].

(vi) Für jedes Teilmenge $Y \subseteq k^n$ ist $\overline{Y} = V(I(Y))$ gerade die Abschließung von Y bezüglich der Zariski-Topologie des k^n

Dabei bezeichne $\sqrt{I}$ das Radikal von I, d.h. das Ideal aller Polynome, für welche eine Potenz in I liegt. Der Beweis der Aussagen (i) - (vi) ist nicht sehr schwer (vgl. 1.1.3 und 1.1.4). Wir werden sie hier in einem sehr viel allgemeineren Kontext beweisen.
Eine etwas weniger triviale Aussage, die stärker an die vorliegende konkrete Situation gebunden ist, ist die folgende "Umkehrung" von (ii).

(vii) Für je zwei Ideal I und J von k[T] gilt

$$V(I) \supseteq V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$$

Es ist eine Variante des Hilbertschen Nullstellensatzes (vgl. 1.1.2). Anstelle eines Beweises der Aussagen wollen wir die Definition der Mengen V(I) etwas umformulieren und so die Aussagen einer Verallgemeinerung zugänglich machen, die wir dann beweisen.

5.3 Die Mengen V(I) als Mengen von maximalen Idealen

Aus der ersten Vorlesung wissen wir, daß für jede affine algebraische Varietät

$$X = V(I)$$

die Abbildung

$$X \longrightarrow \text{Specm } k[X],\ x \mapsto m_x = \{f\in k[X] \mid f(x) = 0\},$$

bijektiv ist. Wir können also die Elemente von X mit maximalen Idealen des Koordinatenrings k[X] identifizieren.

Bezeichne ρ den surjektiven k-Algebra-Homomorphismus

$$\rho\colon k[T] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f|_X.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Specm}\ k[X] \longrightarrow \mathrm{Specm}\ k[T],\ m \mapsto \rho^{-1}(m),$$

injektiv und erlaubt es, Specm k[X] mit der Menge der maximalen Ideale von k[T] zu identifizieren, die das Ideal I(X) enthalten,

$$\mathrm{Specm}\ k[X] = \{m \in \mathrm{Specm}\ k[T] \mid I \subseteq m\}.$$

Mit den obigen Identifikationen gilt

$$V(I) \quad = \{m \in \mathrm{Specm}\ k[T] \mid I \subseteq m\}$$

Diese letzte Beschreibung von V(I) bietet die Möglichkeit, die Mengen V(I) für beliebige Ideale I eines kommutativen Rings A mit 1 zu definieren.

5.4 Die Zariski-Topologie eines (nicht notwendig maximalen) Spektrums

Seien A ein kommutativer Ringe mit 1 und

$$X := \mathrm{Specm}\ A \text{ bzw. } X := \mathrm{Spec}\ A$$

die Menge der maximalen Ideale von A bzw. die Menge der Primideale von A. Weiter sei $S \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Wir setzen

$$V(S) := \{m \in X \mid S \subseteq m\}.$$

Man beachte, V(S) ändert sich nicht, wenn man S durch das von S erzeugte Ideal von A ersetzt,

$$V(S) = V(S\bullet A),\ S\bullet A := \{a_1 s_1 + \ldots + a_n \bullet s_n \mid a_i \in A,\ s_i \in S,\ n = 1,2,3,\ldots\}$$

Für $f \in A$ und $m \in X$ bezeichne f(m) das Bild von f bei der natürlichen Abbildung

$$A \longrightarrow A/m$$

auf den Faktorring. Dann gilt

$$f(m) = 0 \Leftrightarrow f \bmod m = 0 \Leftrightarrow f \in m.$$

Dann ist für jede Teilmenge $S \subseteq A$

$$V(S) = \{m \in X \mid f(m) = 0 \text{ für jedes } f \in S\}$$

gerade die Menge der Punkte von X, in denen alle $f \in S$ gleich Null sind.

Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ schreiben wir

$$\begin{aligned} I(Y) \quad &:= \{f \in A \mid f(m) = 0 \text{ für } m \in Y\} \\ &= \{f \in A \mid f \in m \text{ für } m \in Y\} \\ &= \bigcap\nolimits_{m \in Y} m \\ &=^{1} \bigcap Y \end{aligned}$$

für das <u>Ideal der Menge</u> Y, d.h. die Menge der Elemente von A, die in allen Punkten von Y gleich 0 sind.

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $V(0) = X$ und $V(A) = \emptyset$.

(ii) Für Teilmengen S' und S'' von A besteht die Implikation

$$S' \subseteq S'' \Rightarrow V(S') \supseteq V(S'').$$

---

[1] Für eine Menge S, deren Elemente Mengen sind, bezeichne $\bigcap S$ den Durchschnitt der in S liegenden Mengen.

(iii) $V(I\cap J) = V(I\cdot J) = V(I)\cup V(J)$ für Ideale I und J von A.

(iv) $V(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ für jede Familie $\{I_\alpha\}$ von Idealen von A.

(v) $V(I) = V(\sqrt{I})$ für jedes Ideal von A.

(vi) Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ist $\overline{Y} = V(I(Y))$ gerade die Abschließung von Y.

(vii) Für beliegige Ideale I und J von A besteht die Implikation

$$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J} \Rightarrow V(J) \subseteq V(I).$$

Beweis. Zu (i). Weil 0 in jedem Primideal liegt, gilt $V(0) = X$. Weil $1 \in A$ in keinem Primideal liegt, gilt $V(A) = \emptyset$.

Zu (ii). Sei $S' \subseteq S''$. Mit $S'' \subseteq m$ gilt dann auch $S' \subseteq m$, d.h. es ist $V(S') \supseteq V(S'')$.

Zu (iii). Wegen $I \supseteq I\cap J$, $J \supseteq I\cap J$ und $I\cap J \supseteq I\cdot J$ gilt nach (ii)

$$V(I)\cup V(J) \subseteq V(I\cap J) \subseteq V(I\cdot J).$$

Es bleibt noch die Inklusion $V(I\cdot J) \subseteq V(I)\cup V(J)$ zu beweisen. Es reicht, wenn wir zeigen,

$$V(I\cdot J) - V(I) \subseteq V(J).$$

Sei also

$$p \in V(I\cdot J) - V(I)$$

Dann gilt $I \not\subseteq p$. Wir fixieren ein

$$f\in I - p.$$

Für jedes $g \in J$ ist dann $f\cdot g \in I\cdot J \subseteq p$. Weil p ein Primideal ist und f nicht in p liegt,folgt

$$g \in p.$$

Wir haben gezeigt $J \subseteq p$, also $p \in V(J)$.

Zu (iv). Wegen

$$I_\beta \subseteq I:= \sum_\alpha I_\alpha$$

für jedes β gilt nach (ii) auch

$$V(\sum_\alpha I_\alpha) \subseteq V(I_\beta),$$

für jedes β, also

$$V(\sum_\alpha I_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha V(I_\alpha).$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei $p \in V(I_\alpha)$ für jedes α.Wir haben zu zeigen, $p \in V(I)$, d.h.

$$I = \sum_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq p.$$

Jedes $f \in I$ hat die Gestalt

$$f = f_{\alpha_1} + ... + f_{\alpha_r} \text{ mit } f_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i} \subseteq p \text{ für jedes i.}$$

Weil p ein Ideal ist, folgt $f \in p$. Wir haben gezeigt $I \subseteq p$ also $p \in V(I) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$.

Zu (v). Wegen $I \subseteq \sqrt{I}$ gilt nach (ii) auch

$$V(I) \supseteq V(\sqrt{I}).$$

Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Für $p \in V(I)$ gilt

$$I \subseteq p.$$

Ist $f \in \sqrt{I}$, so gibt es eine natürliche Zahl n mit $f^n \in I \subseteq p$. Weil p ein Primideal ist, folgt $f \in p$. Damit gilt $\sqrt{I} \subseteq p$, also $p \in V(\sqrt{I})$.

Zu (vi). Die Abschließung $\overline{Y}$ von Y ist definiert als Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, welche die Menge Y enthalten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\overline{Y} &= \bigcap \{V(S) \mid S \subseteq k[T] \text{ und } Y \subseteq V(S)\}\\ &= \bigcap \{V(S) \mid S \subseteq k[T] \text{ und } S \subseteq p \text{ für jedes } p \in Y\}\\ &= \bigcap \{V(S) \mid S \subseteq k[T] \text{ und } S \subseteq \bigcap Y = I(Y)\}\end{aligned}$$

Die Menge der Teilmengen $S \subseteq I(Y)$ hat ein maximales Element, nämlich $S = I(X)$. Die Menge der V(S) hat damit ein minimales Element, nämlich V(I(X)). Der Durchschnitt aller V(S) ist gleich diesem minimalen Element, d.h.

$$\overline{Y} = V(I(Y)).$$

Zu (vii). Mit $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ gilt nach (ii) auch $V(\sqrt{J}) \subseteq V(\sqrt{I})$, also nach (v)

$$V(J) \subseteq V(I).$$

QED.

Bemerkungen

(i) Die Umkehrung von Aussage (vii),

$$V(J) \subseteq V(I) \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$$

ist für die Ideale I, J von beliebigen kommutativen Ringen A mit 1 für die maximalen Spektren im allgemeinen nicht richtig. Seien zum Beispiel p eine Primzahl und

$$A = \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a,b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \notin p\mathbb{Z}\}$$

die Lokalisierung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ im Primideal $(p) := p\bullet\mathbb{Z}$. Weil

$$pA := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in p\mathbb{Z} \text{ und } b \notin p\mathbb{Z}\}$$

das einzige maximale Ideal von A ist, gilt

$$V(0) = \text{Specm } A = \{pA\} = V(pA)$$

Die beiden Ideale pA und 0 sind Primideale von A, stimmen also mit ihrem jeweiligen Radikal überein. Weil sie verschieden sind, sind es auch ihre Radikale, d.h.

$$\sqrt{0} = 0 \neq pA = \sqrt{pA}\,.$$

(ii) Für die Spektren, d.h. für den Fall von Primidealen anstelle der maximalen Ideale gilt die Umkehrung von (vii), d.h. es ist

$$V(I) \supseteq V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}\,.$$

Trivialerweise gilt nämlich,

$$V(I) \supseteq V(J) \Rightarrow \bigcap V(I) \subseteq \bigcap V(J).$$

Es reicht also zu zeigen, daß für jedes Ideal I von A gilt

$$\bigcap V(I) = \sqrt{I}.$$

Offensichtlich besteht die Inklusion “$\supseteq$”, denn für $f \in \sqrt{I}$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $f^n \in I$, d.h. f^n liegt in jedem $p\in V(I)$. Weil p ein Primideal ist, folgt $f\in p$ für jedes $p\in V(I)$, also $f \in \bigcap V(I)$. Es gilt also

$$\bigcap V(I) \supseteq \sqrt{I}.$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, für jedes

$$f \in A - \sqrt{I}$$

gibt es ein

$$p \in V(I) \text{ mit } f \notin p.$$

Dazu betrachten wir den Quotientenring

$$A_f = \{\frac{a}{f^n} \mid a\in A, n \text{ nicht-negativ ganz }\}.$$

Weil keine Potenz von f in I liegt, ist das von I in A_f erzeugte Ideal $I\cdot A_f$ ein echtes Ideal. Es gibt deshalb ein maximales Ideal $m \subseteq A_f$ mit $I\cdot A_f \subseteq m$. Sei

$$p := \rho^{-1}(m) \in \text{Spec } A$$

das vollständige Urbild von m beim natürlichen Homomorphismus

$$A \longrightarrow A_f,\ a \mapsto a/1.$$

Nach Konstruktion gilt

$$I = \rho^{-1}(I\cdot A_f) \subseteq \rho^{-1}(m) = p.$$

Außerdem kann f nicht in p liegen, denn andernfalls würde die Einheit

$$f/1 = \rho(f)$$

von A_f in m liegen, d.h. es wäre $m = A_f$ und m kein maximales Ideal.

(iii) Die Zariki-Topologien von Spec A und Specm A stehen in einem engen Zusammenhang. Um sie vergleichen zu können, vereinbaren wir vorübergehend die folgenden Bezeichnungen.

$$V(I) := \{p\in \text{Spec } A \mid I \subseteq p\} \text{ und } Vm(I) := \{m\in \text{Specm } A \mid I \subseteq m \}.$$

Weiter bezeichne

$$cl(S) \text{ bzw. } clm(S)$$

die Abschließung einer Menge S in Spec A bzw. in Specm A.
Dann gilt

$$Vm(I) = V(I) \cap \text{Specm } A, \tag{1}$$

d.h. die Topologie von Specm A ist die Unterraum-Topologie von Spec A.
Insbesondere ist die Abbildung

$$\alpha: \left\{\begin{matrix}\text{abgeschlossene Mengen}\\ \text{von Spec A}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{abgeschlossene Mengen}\\ \text{von Specm A}\end{matrix}\right\}$$

$$F \mapsto F\cap \text{Specm } A,$$

wohldefiniert. Sie ist außderm surjektiv. Zum Beweis betrachten wir die Abbildung in umgekehrter Richung

$$\beta: \left\{\begin{matrix}\text{abgeschlossene Mengen}\\ \text{von Specm A}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{abgeschlossene Mengen}\\ \text{von Spec A}\end{matrix}\right\},$$

$$F \mapsto cl(F).$$

Es reicht zu zeigen,

$$\alpha\circ\beta = Id, \tag{2}$$

denn dann ist α surjektiv und β injektiv. Nach Definition von β und α gilt nämlich

$$\alpha(\beta(F)) = cl(F) \cap \text{Specm } A \supseteq F$$

Weiter hat jedes $F \in$ Specm A die Gestalt $F = Vm(I)$ ($\subseteq V(I)$). Weil V(I) abgeschlossen ist in Spec A, folgt $cl(F) = cl(Vm(I)) \subseteq V(I)$ also

$$\beta(F) = cl(F) \subseteq V(I).$$

Wir wenden α an und erhalten

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(F)) &\subseteq \alpha(V(I)) \\ &= V(I) \cap \text{Specm } A && \text{(nach Definition von } \alpha) \\ &= Vm(I) && \text{(nach (1))} \\ &= F. && \text{(nach Definition von F)}\end{aligned}$$

Zusammen folgt (2). Für $F \in$ Specm(A) gilt wegen (2) auch

$$\beta(F) = (\beta\circ\alpha)(\beta(F)),$$

d.h.

$$(\beta\circ\alpha)|_{Im(\beta)} = Id. \tag{3}$$

Folgende Bedingungen sind äquivalent.[2]

(a) α und β sind zueinander inverse Bijektionen.

(b) β ist surjektiv.

(c) $cl(Vm(I)) = V(I)$ für jedes Ideal I von A.

(d) Jedes Primideal von A ist Durchschnitt von maximalen Idealen.

Man beachte, Bedingung (d) ist für Polynomringe

$$k[T_1,...,T_n]$$

über algebraisch abgeschlossenen Körpern in endlich vielen Unbestimmten erfüllt (vgl. 1.2.6). Weil jede endlich erzeugte k-Algebra Faktorring eines solchen Polynomrings ist und wir deren Spektrum als Teilmenge von Spec k[T] betrachten können, ist (d) auch für endlich erzeugte k-Algebren erfüllt. Kommutative Ringe mit 1, die der Bedingung (d) genügen heißen Hilbert-Ringe oder auch Jacobson-Ringe in der Terminologie von Bourbaki. Es sind gerade die Ringe, für welche ein Analogon des Hilbertschen Nullstellensatzes gilt (vgl. I. Kaplansky: Commutative rings, The University of Chicgo Press, 1970, Kapitel I, und N. Bourbaki: Algèbre commutative, Hermann, Paris 1964, Kapitel V, §3, no. 4).

Beweis der Äquivalenz der Bedingungen (a)-(d) von Bemerkung (iii).

Zu (a) $\Rightarrow$ (b): das gilt trivialerweise.

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): das folgt aus (2) und (3).

Zu (c) $\Rightarrow$ (b): Jede abgeschlossene Menge von Spec A hat die Gestalt F = V(I), d.h. es ist

$$\begin{aligned}F &= cl(Vm(I)) && \text{(nach Voraussetung (c))} \\ &= \beta(Vm(I)), && \text{(nach Definition von } \beta)\end{aligned}$$

2

d.h. β ist surjektiv.

Zu (a) $\Rightarrow$ (c): V(I) ist abgeschlossen in Spec A, Damit gilt

$$
\begin{aligned}
V(I) &= \beta(\alpha(V(I)) && \text{(nach Voraussetzung (a))}\\
&= cl(V(I)\bigcap \text{Specm } A) && \text{(nach Definition von } \alpha \text{ und } \beta)\\
&= cl(Vm(I)). && \text{(nach (1))}
\end{aligned}
$$

Zu (d) $\Rightarrow$ (c). Wegen $Vm(I) \subseteq V(I)$ und weil V(I) abgeschlossen ist in Spec A, gilt

$$cl(Vm(I)) \subseteq cl(V(I)) = V(I).$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei $p \in V(I)$. Dann gilt $I \subseteq p$, also

$Vm(I) \supseteq Vm(p)$, also

$$
\begin{aligned}
cl(Vm(I)) &\supseteq cl(Vm(p))\\
&= V(I(Vm(p)) && \text{(nach Aussage (vi))}\\
&= V(\bigcap Vm(p)) && \text{(nach Definition des Ideals einer Menge)}
\end{aligned}
$$

Nun ist $\bigcap Vm(p)$ der Durchschnitt aller maximalen Ideale, welche p enthalten. Weil p nach Voraussetung (d) Durchschnitt von maximalen Idealen ist, folgt $\bigcap Vm(p) = p$, also

$$cl(Vm(I)) \supseteq V(p) \ni p.$$

Zu (c) $\Rightarrow$ (d). Sei I = p ein Primideal. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
V(p) &= cl(Vm(p)) && \text{(nach Voraussetzung (c) für I = p)}\\
&= V(I(Vm(p))) && \text{(nach Aussage (vi))}\\
&= V(\bigcap Vm(p)) && \text{(nach Definition des Ideals einer Menge)}
\end{aligned}
$$

Nach Bemerkung (ii) folgt

$$\sqrt{p} = \sqrt{\bigcap Vm(p)}$$

Weil p ein Primideal ist, gilt $\sqrt{p} = p$. Auch das Ideal $\bigcap Vm(p)$ stimmt mit seinem Radikal überein, weil es Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Damit gilt

$$\bigcap Vm(p) = p,$$

d.h. p ist Durchschnitt von maximalen Idealen.

QED.