

## 2 Vierdimensionale Raumzeit

### 2.1 Einführung

H.G. Wells  
"The Time Machine"  
1895

Der Zeitreisende (denn so wollen wir ihn der Bequemlichkeit halber nennen) war im Begriff, uns eine tiefsinnige Sache darzulegen. [...]

'Natürlich wissen wir, daß eine mathematische Linie eine Linie der Dicke *Null*, in Wirklichkeit nicht existiert. Das hat man Sie doch gelehrt? Ebensovienig existiert eine mathematische Ebene. Diese Dinge sind nur Abstraktionen.'

'Das stimmt', sagte der Psychologe.

'Ebensovienig kann ein Würfel, wenn er nur Länge, Breite und Höhe hat, tatsächlich existieren.'

'Hier muß ich widersprechen', sagte Filby. 'Natürlich kann ein fester Körper tatsächlich existieren. Alle Objekte der Wirklichkeit...'

'So denken die meisten Leute. Aber haben Sie einen Augenblick Geduld. Kann ein *momentaner* Würfel existieren?'

'Kann Ihnen nicht folgen', sagte Filby.

'Kann ein Würfel existieren, der keinerlei zeitliche Dauer hat?'

Filby wurde nachdenklich.

'Es ist klar', fuhr der Zeitreisende fort, 'daß jeder tatsächlich vorhandene Körper sich in vier Richtungen ausdehnen muß: in Länge, Breite, Höhe und – in Dauer. Aber infolge einer angeborenen Unvollkommenheit unserer menschlichen Natur sind wir – wie ich gleich erklären werde – geneigt, diese Tatsache zu übersehen. Tatsächlich gibt es vier Dimensionen, von denen wir drei die Richtungen des Raums nennen, und eine vierte, die Zeit. Es besteht aber die Tendenz, eine unbegründete Unterscheidung zwischen den erstgenannten drei Dimensionen und der letzteren zu machen, weil sich unser Bewußtsein in dieser vierten Dimension vom Beginn bis zum Ende unseres Daseins ständig und manchmal sprungweise nur in eine Richtung bewegt.'

'Das', sagte ein sehr junger Mann, der sich krampfhaft bemühte, seine Zigarre an der Lampe wieder anzuzünden, 'das ... ist tatsächlich völlig klar.'

**Ereignis, Raumzeit, Weltlinie**

- (i) Ein *Ereignis* ist, was zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort passiert.
- (ii) Die Menge  $M$  aller Ereignisse bildet die *Raumzeit*.
- (iii) Der Weg eines Teilchens durch die Raumzeit bildet die *Weltlinie* dieses Teilchens.

Raumzeit-Diagramme werden üblicherweise so gezeichnet, daß die Zeit von unten nach oben verläuft. Ein ruhendes Teilchen hat also eine senkrechte Weltlinie. Die Weltlinie verläuft um so flacher, je schneller sich ein Objekt bewegt.

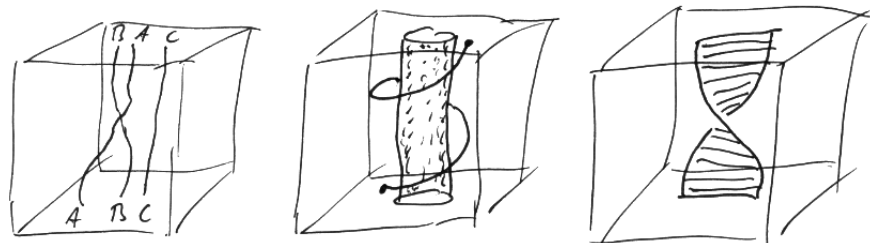


Abb. 2.1: Raumzeit-Diagramme: (i) Weltlinien einiger Teilchen, (ii) zur Weltröhre verdickte Weltlinie eines Fixsterns mit einem Planeten und (iii) die Weltfläche eines rotierenden Stabes.

Eine besondere Rolle wird das Raumzeit-Diagramm eines sich nach allen Seiten ausbreitenden kurzen Lichtblitzes, der *Lichtkegel*, spielen.

## Lichtkegel

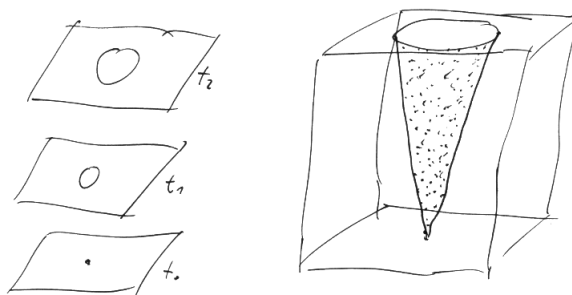


Abb. 2.2: Der Lichtkegel

Um Raum- und Zeitintervalle miteinander vergleichen zu können, setzen wir in Raumzeit-Diagrammen die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$ . Damit wird eine Nanosekunde also ein Fuß.<sup>1</sup>

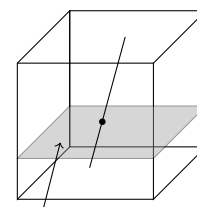
## 2.2 Zur Geometrie des $\mathbb{R}^4$

Die meisten Probleme, die wir behandeln werden – das Schwerfeld kugelsymmetrischer Körper, rotationssymmetrische kosmologische Modelle etc – haben eine so hohe Symmetrie, daß die Tatsache daß wir in unseren Skizzen und Bildern nicht alle vier Dimensionen darstellen können, kein allzu großes Problem darstellt und die Bilder – richtig gelesen – nicht allzu sehr in die Irre führen.

Trotzdem mag es nützlich sein, ein paar kleine Denkanstöße zur Geometrie in höheren Dimensionen zu geben.

(i) Es ist eine Übung in linearer Algebra, die möglichen Schnittmengen affiner Unterräume (Geraden  $\mathbb{R}$ , Ebenen  $\mathbb{R}^2$ , Hyperebenen  $\mathbb{R}^3$ ) zu finden:

- Eine Gerade kann nicht nur vollständig in einer Hyperebene liegen, sie kann mit einem  $\mathbb{R}^3$  auch genau einen Punkt gemeinsam haben.
- Zwei Ebenen können sich nicht nur längs einer Geraden sondern auch genau in einem Punkt schneiden. Man nehme z.B. die  $xy$ -Koordinatenebene  $\{z = t = 0\}$  und die  $zt$ -Koordinatenebene  $\{x = y = 0\}$ . Diese haben genau einen Punkt, den Ursprung  $x = y = z = t = 0$ , gemeinsam.



(Ich bin ein  $\mathbb{R}^3$ )

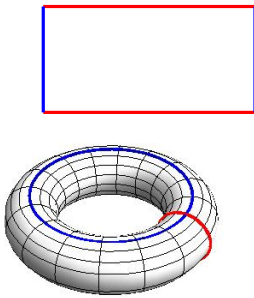
(ii) Im  $\mathbb{R}^2$  kann man durch eine geschlossene Kurve gefangengehalten werden, im  $\mathbb{R}^3$  kann man darüber wegspringen. Analog kann man sich aus der Gefangenschaft in einem Haus befreien, indem man 500 Jahre in die Vergangenheit reist, das Grundstück des noch nicht gebauten Hauses verläßt und sich wieder in die Gegenwart begibt.

(iii) Die Seiten eines 4-dimensionalen Hyperwürfels<sup>2</sup> (ein „Würfel mit Dauer“ nach H.G. Wells) bestehen aus 8 dreidimensionalen Würfeln: Die Grund- und Deck(hyper)fläche sind jeweils 2 nur augenblicklich zur Zeit  $t = 0$  bzw.  $t = 1$  existierende gewöhnliche Würfel. Den 6 quadratischen Seitenflächen des Grundwürfels wird Dauer verliehen, die sich bis zu den 6 Quadraten des Deckwürfels erstreckt – sie werden dadurch ebenfalls zu sechs

<sup>1</sup>Für Pedanten: das ist natürlich kein britisches Fuß zu 30,48 cm sondern ein Photon-Fuß zu 29,979 245 8 cm.

<sup>2</sup>In Koordinaten: die Menge  $\{(x, y, z, t) \mid 0 \leq x, y, z, t \leq 1\}$

3-dimensionalen Würfeln. Das macht insgesamt 8 Würfel, die die Oberfläche des Hyperwürfels bilden.



- (iv) Ein Torus kann bekanntlich mit einer flachen Geometrie versehen werden. Er ist ein Rechteck, bei dem gegenüberliegende Kanten identifiziert werden ("periodische Randbedingungen"). Es existiert allerdings keine isometrische<sup>3</sup> glatte<sup>4</sup> Einbettung des flachen Torus in den  $\mathbb{R}^3$ . Wir können aus einem Blatt Papier isometrisch einen Zylinder rollen, indem wir die 3. Dimension nutzen. Allerdings können wir den Zylinder nicht weiter zu einem Torus biegen, ohne ihn zu zerreißen.

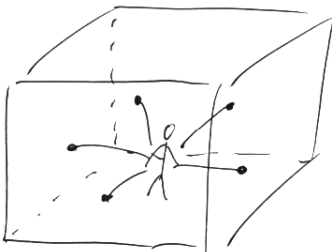
Im  $\mathbb{R}^4$  ist dies möglich. Man kann die 4. Dimension nutzen und den Zylinder zu einem flachen Torus verbiegen. Sei  $S_a^1$  ein Kreis in der  $x_1x_2$ -Ebene und  $S_b^1$  ein Kreis in der  $x_3x_4$ -Ebene. Dann ist  $S_a^1 \times S_b^1$  eine isometrische Einbettung des flachen Torus in den  $\mathbb{R}^4$ .

## 2.3 Die Raumzeit nach Galilei und Newton

- (i) *Der Jüngling ist 16 Lenzen, 3 Monde und 10 Tage alt.  
Eine Sekunde ist die Dauer von 9 192 631 770 Perioden der beim Übergang zwischen den Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entstehenden Strahlung.*

Wir erfahren und messen die Zeit durch ein System von periodischen Vorgängen, wie Sonnenjahr, Erdrotation, Pendelschwingung, Schwingungen eines Quarzkristalls oder eines Atoms. Es ist eine Erfahrungstatsache, daß die durch verschiedene periodische Vorgänge gegebenen Zeitmaße mit hoher Genauigkeit affine Funktionen voneinander sind. Diese Äquivalenzklasse modulo affine Transformationen  $t' = at + b$  definiert die *absolute Zeit*.

Die Zeit ist also eindimensional und verläuft für alle Beobachter gleich und gleichförmig. Prozesse, die sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten kann man verwenden, um Uhren an verschiedenen Orten zu synchronisieren: Beobachter A läßt eine schwere Masse periodisch schwingen, Beobachter B mißt die sich nach Newton instantan (unendlich schnell) ausbreitenden Änderungen des Gravitationspotentials.



- (ii) Der Raum ist dreidimensional, homogen (translationsinvariant), isotrop (rotationsinvariant) und flach. Es gelten also die Gesetze der euklidischen Geometrie, insbesondere ist die Winkelsumme im Dreieck gleich  $\pi$ .

Wie überzeugen wir uns von der Isotropie des Raumes? Wir werfen z.B. eine Kugel mit gleicher Kraft in verschiedene Richtungen. Wenn sie dabei stets dieselbe Bahnkurve mit derselben Geschwindigkeit durchläuft, ist der Raum isotrop. Zum Test der Homogenität wiederholen wir dieses Experiment an verschiedenen Orten. Dieses Experiment klappt nur, wenn das Labor, in dem wir uns befinden, sich nicht selbst beschleunigt bewegt. Wird unser Labor in eine Richtung beschleunigt, werden wir einen Unterschied feststellen zwischen Würfeln nach vorne und nach hinten. Dreht sich unser Labor (auch eine beschleunigte Bewegung!), gibt es Unterschiede zwischen Würfeln in Richtung der Drehachse und senkrecht zur Drehachse.

Dies war das Argument Newtons für die physikalische Existenz eines absoluten Raumes: auch wenn wir ganz allein auf der Welt sind, können wir feststellen, ob

<sup>3</sup>alle Abstände und damit die flache Geometrie erhaltend

<sup>4</sup>beliebig oft differenzierbar

wir – bezüglich des leeren Raumes – uns beschleunigt bewegen, rotieren oder nicht.

Im Gegensatz dazu ist jedoch eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber dem leeren Raum nicht feststellbar – das Konzept einer *absoluten Ruhe* gegenüber dem leeren Raum ist sinnlos.

Unser Labor liefert für uns ein Bezugssystem, in dem wir Bewegungen von Körpern beschreiben können. Mathematisch entspricht dies der Wahl eines Koordinatensystems.

Es gibt eine ausgezeichnete Klasse von Bezugssystemen, die *Inertialsysteme*. Bezüglich eines Inertialsystems erscheint der Raum homogen und isotrop und ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit (gleichförmig). Alle Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

## Inertialsystem

In allen Inertialsystemen gelten also dieselben physikalischen Gesetze. Dies hat Galilei sehr nachdrücklich herausgearbeitet:

Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst großen Raum unter dem Deck eines großen Schiffes ein. Verschafft Euch dort Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäß mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen kleinen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäß tröpfeln läßt.

**Galileo Galilei**  
**„Dialog über die**  
**Weltsysteme“**  
**1632**

Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgendwelchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Euerem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, daß es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füßen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung hin gleichweit gelangen. Achtet darauf, Euch aller dieser Dinge sorgfältig zu vergewissern, wiewohl kein Zweifel obwaltet, daß bei ruhendem Schiffe alles sich so verhält.

Nun laßt das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet – wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend – bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. Beim Springen werdet Ihr auf den Dielen die nämlichen Strecken zurücklegen wie vorher, und wiewohl das Schiff aufs schnellste sich bewegt, könnt Ihr keine größeren Sprünge nach dem Hinterteile als nach dem Vorderteile machen: und doch gleitet der mit Euch befindliche Boden während der Zeit, wo Ihr Euch in der Luft befindet, in entgegengesetzter Richtung zu Euerem Sprunge vorwärts. Wenn Ihr Euerem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht mit größerer Kraft zu werfen, damit er ankomme, ob nun der Freund sich im Vorderteile und Ihr Euch im Hinterteile befindet oder ob Ihr umgekehrt steht. Die Tropfen werden wie zuvor in das untere Gefäß fallen, kein einziger wird nach dem Hinterteile zu fallen obgleich das Schiff, während der Tropfen in der Luft ist, viele Spannen zurücklegt. Die Fische im Wasser werden sich nicht mehr anstrengen müssen, um nach dem vorangehenden Teile des Gefäßes zu schwimmen als nach dem hinterher folgenden; sie werden sich vielmehr mit gleicher Leichtigkeit nach dem Futter begeben, auf welchen Punkt des Gefäßrandes man es auch legen mag.

Endlich werden auch die Mücken und Schmetterlinge ihren Flug ganz ohne Unterschied nach allen Richtungen fortsetzen. Niemals wird es vorkommen, daß sie gegen die dem Hinterteil zugekehrte Wand gedrängt werden, gewissermaßen müde von der Anstrengung dem schnellfahrenden Schiffe nachfolgen zu müssen, und doch sind sie während ihres langen Aufenthaltes in der Luft von ihm getrennt. Verbrennt man ein Korn Weihrauch, so wird sich ein wenig Rauch bilden, man wird ihn in die Höhe steigen, wie eine kleine Wolke dort schweben und unterschiedslos sich nicht mehr nach der einen als nach der anderen Seite hin bewegen sehen.

Die Ursache dieser Übereinstimmung aller Erscheinungen liegt darin, daß die Bewegung des Schiffes allen darin enthaltenen Dingen, auch der Luft, gemeinsam zukommt.

Darum sagte ich auch, man solle sich unter Deck begeben, denn oben in der freien Luft, die den Lauf des Schiffes nicht begleitet, würden sich mehr oder weniger deutliche Unterschiede bei einigen der genannten Erscheinungen zeigen. So würde unzweifelhaft der Rauch ebensoweit zurückbleiben wie die Luft selbst.

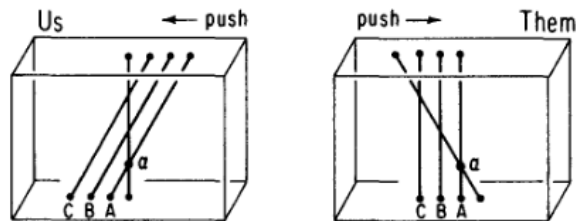
**Satz 2.3.1** (Galileisches Relativitätsprinzip). *Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich. Sie sind invariant unter Galilei-Transformationen*

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad (2.1)$$

$$t' = t \quad (2.2)$$

zwischen zwei Inertialsystemen mit der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$ .

Was bedeutet die Gleichberechtigung aller Inertialsysteme für die Struktur der Raumzeit? Galilei-invariant, d.h. unabhängig vom gewählten Inertialsystem, ist der zeitliche Abstand  $t_1 - t_2$  zweier Ereignisse sowie der räumliche Abstand  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$  zweier *gleichzeitiger* Ereignisse. Der räumliche Abstand zweier *nicht-gleichzeitiger* Ereignisse wird jedoch von verschiedenen Inertialsystemen aus verschieden beurteilt. Vom Beobachter A aus gesehen mögen zwei Ereignisse heute und morgen am selben Ort stattfinden, vom Beobachter B aus gesehen (der findet, daß sich A mit 1000km/Tag von ihm entfernt), liegen sie 1000km auseinander – und beide Standpunkte sind gleichberechtigt.



Diese Grafik<sup>5</sup> zeigt, wie A und B ihre Raumzeit-Diagramme zeichnen würden. Die absolute Zeit liefert eine für alle Beobachter gleiche Blätterung der Raumzeit in Hyperebenen  $\cong \mathbb{R}^3$  gleichzeitiger Ereignisse. Allerdings sehen Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen, diese Blätter wie einen Kartenstapel gegeneinander verschoben:

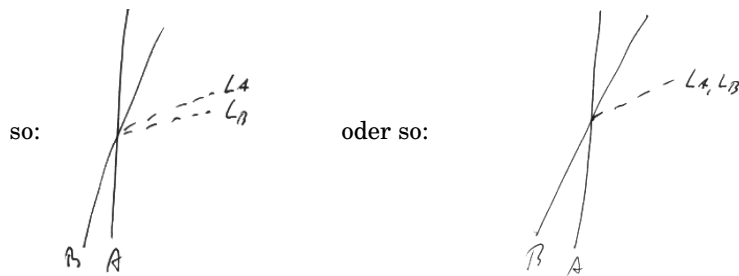


und es gibt keine invariante Möglichkeit, Raumpunkte zu verschiedenen Zeiten miteinander in Beziehung zu setzen.

## 2.4 Die Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie

Ende des 19. Jahrhunderts wurde klar, daß es ein Problem mit der Galilei-Invarianz der Lichtausbreitung gibt. Angenommen, zwei Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen, geben im Moment ihres Zusammentreffens mit einem Laserpointer einen fokussierten Lichtstrahl in die Richtung ihrer Relativbewegung ab. Sieht das Resultat im Raumzeit-Diagramm

<sup>5</sup>aus R. Geroch, *General Relativity – From A to B*, Chicago 1978



aus? Bei einem mechanischen Vorgang (Schuß) erwartet man ersteres: Von A aus gesehen addiert sich die Relativgeschwindigkeit von B zur Geschwindigkeit seines Geschosses, die Geschößbahn erscheint im Raumzeit-Diagramm flacher. Astronomische Beobachtungen, bei denen A und B die Sterne eines sich umkreisenden Doppelsternsystems sind, beweisen, daß für die Lichtemission die zweite Variante zutrifft: *unabhängig von der Eigenbewegung der Lichtquelle hat das abgestrahlte Licht immer dieselbe Geschwindigkeit c.*

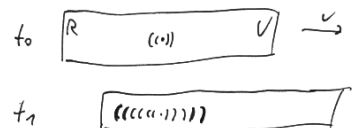
Dafür gab es erst mal eine Erklärung. Licht braucht – glaubte man – ein Medium, in dem es sich ausbreitet, den Äther. Offensichtlich bewegt es sich nicht relativ zur Lichtquelle sondern relativ zum Äther mit  $v = c$ . Dann allerdings muß in einem Labor, das sich relativ zum Äther bewegt (wie die Erde auf der Bahn um die Sonne), die Lichtgeschwindigkeit richtungsabhängig sein. Dies widerlegte 1887 das Michelson-Morley-Experiment. Dies hatte zahlreiche weitere Theorien zur Folge, die z.B. eine teilweise Mitnahme des Äthers durch bewegte Körper annahmen.

Letztendlich lassen aber alle Experimente (Aberration des Lichts, Michelson-Morley, Sagnac-Effekt, Fizeau-Experiment,...) nur einen Schluß zu:

**Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.** Unabhängig vom Bewegungszustand von Lichtquelle und Beobachter mißt jeder Beobachter in jedem Inertialsystem die gleiche Lichtgeschwindigkeit.

Dies ist nicht mit den Galilei-Newtonschen Annahmen über die Raumzeit vereinbar. In verschiedenen Inertialsystemen müssen die Uhren verschieden ticken. Insbesondere gibt es keine absolute Gleichzeitigkeit. Ereignisse, die für einen Beobachter gleichzeitig stattfinden, sind für einen anderen Beobachter ungleichzeitig.

A's Labor bewege sich relativ zu B mit großer Geschwindigkeit  $v$ . Nun erzeuge A genau in der Mitte seines Labors einen kurzen Lichtblitz. Natürlich erreicht das Licht nach Ansicht von A die Vorderwand V und die Rückwand R seines Labors gleichzeitig. Von B aus gesehen bewegt sich allerdings in der Zeit, die das Licht von der Labormitte bis zur Wand braucht, die Wand V vom Ort der Lichtemission weg und R auf diesen Ort zu. Das Licht muß also von B aus gesehen nach vorne einen weiteren Weg zurücklegen als nach hinten.



Nach Galilei erreicht es trotzdem V und R gleichzeitig, da seine Geschwindigkeit relativ zu B in Vorwärtsrichtung gleich  $c + v$  und in Rückwärtsrichtung gleich  $c - v$  ist.

In einer Welt, in der das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt, wird allerdings B tatsächlich beobachten, daß das Licht R früher erreicht als V.

Zwei Ereignisse an verschiedenen Orten, die für einen Beobachter gleichzeitig stattfinden, werden für einen Beobachter in einem anderen Inertialsystem im Allgemeinen nicht gleichzeitig stattfinden.

Das Relativitätsprinzip

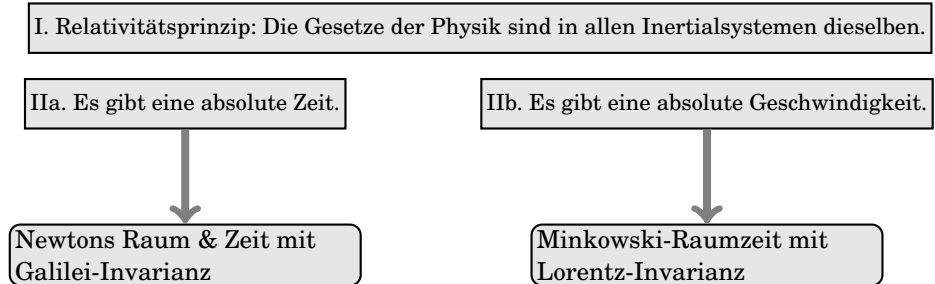
Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. In ihnen gelten dieselben physikalischen Gesetze. Insbesondere ist ein ruhendes System nicht von einem gleichförmig bewegten System zu unterscheiden.



Hermann Minkowski  
1864-1909

bleibt natürlich weiterhin gültig.

In den folgenden Kapiteln werden wir eine Geometrie der Raumzeit konstruieren, die mit dem **Relativitätsprinzip für Inertialsysteme** und dem **Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** vereinbar ist. Diese Raumzeit ist der *Minkowski-Raum*.



## 3 Spezielle Relativitätstheorie

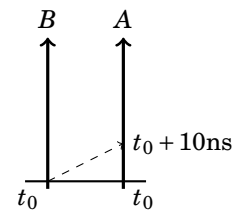
### 3.1 Endlichkeit der Signalausbreitung, Synchronisation, Dopplereffekt

Wir kennen keine Möglichkeit, Signale schneller als mit Lichtgeschwindigkeit zu versenden. Damit ist ein Blick in die Welt immer ein Blick in die Vergangenheit.

Wenn ich die Uhr  $A$  vor mir mit der Uhr  $B$  synchronisieren will, die 10 Fuß entfernt in meinem Labor steht, dann weiß ich natürlich, daß die Zeitanzeige  $t_B$  von  $B$ , die ich gerade sehe, 10 Nanosekunden alt ist. Daher muß ich die Uhr  $A$  auf die Zeit  $t_B + 10\text{ns}$  stellen, damit die Uhren synchron laufen.

Nun können zwei Beobachter an den Uhren  $A$  und  $B$  stehen und jeder kann mit seiner Uhr ermitteln, wann er einen Lichtblitz erzeugt bzw. wann er den Lichtblitz des anderen sieht. Sollten bei einem späteren Treffen der Beobachter diese Zeitreihen verglichen werden, so wird sich der korrekte Wert der Lichtgeschwindigkeit finden.

Wenn die so synchronisierten Uhren sich im selben Inertialsystem befinden, werden sie auch synchron bleiben und dadurch für dieses Inertialsystem die Gleichzeitigkeit von Ereignissen an den Orten  $A$  und  $B$  definieren.



In einer Newtonschen Welt können wir immer annehmen, daß uns ein Kommunikationskanal zwischen den Inertialsystemen zur Verfügung steht, der so viel schneller als die Relativbewegung der beiden Systeme ist, daß Laufzeiteffekte vernachlässigbar sind.

Es ist ein wichtiges Charakteristikum der Relativitätstheorie, daß dies bei Relativgeschwindigkeiten nahe  $c$  nicht möglich ist. Bei der Analyse relativistischer Effekte spielen die endlichen Laufzeiten von Signalen eine *unvermeidbare* Rolle.

Trotzdem sollte man nicht den Fehler machen und annehmen, die relativistische Effekte wie Zeitdilatation etc. würden sich in solchen Laufzeiteffekten erschöpfen.

Wenn ein Raumschiff sich von der Erde entfernt und wir eine Fernsehübertragung aus diesem Raumschiff beobachten, werden wir sehen, daß die Borduhren langsamer laufen. Ein Grund dafür ist, daß die Laufzeit der Signale vom Raumschiff zu uns zwischen zwei Umdrehungen des Zeigers der Borduhr schon wieder angewachsen ist. Das ist *nicht* die relativistische Zeitdilatation! Diesen Laufzeiteffekt (der ja auch in einem Newtonschen Universum auftritt) können wir rausrechnen. Die Zeitdilatation ist die Zeitverlangsamung der Borduhr, die dann (im Unterschied zur Newtonschen Welt) noch übrig bleibt und sich *nicht* durch Laufzeiteffekte erklären läßt.

Sollte sich das Raumschiff auf uns zu bewegen, werden wir aufgrund der ständig sinkenden Signallaufzeiten in der Fernsehübertragung aus dem Raumschiff sogar Uhren sehen, die schneller als unsere laufen. Nach Herausrechnen des Laufzeiteffektes werden wir allerdings finden, daß die Borduhren doch langsamer laufen, und zwar genauso langsam wie beim gleichschnell wegfliegenden Raumschiff.

Man muß natürlich nicht auf Fernsehbilder von Uhren starren. Es reicht aus, die Frequenz der ankommenden elektromagnetischen Wellen zu messen, wenn man weiß mit welcher Frequenz sie gesendet wurden. Signale von sich weg bewegenden Quellen erscheinen langwelliger (Rotverschiebung), Signale von entgegenkommenden Objekten kurzwelliger (Blauverschiebung). Der *relativistische Dopplereffekt* entsteht durch das Zusammenwirken von Laufzeiteffekten (*klassischer Dopplereffekt*) und Zeitdilatation.

#### Dopplereffekt

Durch den Austausch von Lichtsignalen können sich zwei Beobachter  $A$  und  $B$  im gleichen Inertialsystem davon überzeugen, daß ihre Uhren gleich schnell laufen (rechtes Bild in Abb. 3.1). Wenn sich ein Beobachter relativ zum anderen bewegt, werden sie feststellen, daß die Zeitintervalle der empfangenen Signale sich um einen Faktor<sup>1</sup>  $K$  von den gesendeten Signalen unterscheiden. Dies gilt

<sup>1</sup>oft nach Hermann Bondi (1919-2005) *Bondi-Faktor* genannt



natürlich nach dem Relativitätsprinzip gleichermaßen für beide Beobachter (linkes Bild in Abb. 3.1).

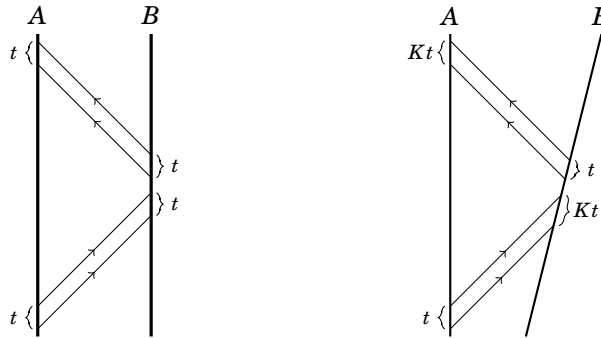


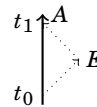
Abb. 3.1

Dieser  $K$ -Faktor beschreibt den relativistischen Dopplereffekt,<sup>2</sup> eine Kombination von Laufzeiteffekten und Zeitdilatation.

Man könnte nun versucht sein, den  $K$ -Faktor durch elementare Trigonometrie aus diesem Bild abzuleiten - und würde finden, daß, im Widerspruch zum Relativitätsprinzip, die beiden von A und B gemessenen  $K$ -Faktoren verschieden sind. Der Fehler liegt darin, daß wir noch gar nicht wissen, wie die Zeitachse (Weltlinie) von B zu eichen ist. Wenn längs der A-Achse ein Zentimeter einer Sekunde entspricht, so muß das längs der B-Achse nicht so sein.

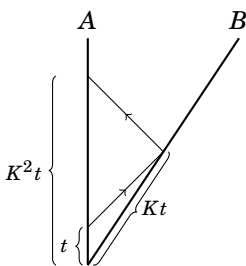
Wir verwenden neben der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und dem Relativitätsprinzip folgende Annahmen in unserer Herleitung der Geometrie der Raumzeit:

- (i) Die Raumzeit ist ein affiner (translationsinvarianter) Raum.
- (ii) Die Weltlinien von Lichtstrahlen sind Geraden in diesem affinen Raum.
- (iii) Die Weltlinien von inertialen Beobachtern sind Geraden in diesem affinen Raum.
- (iv) Die inertialen Beobachter verfügen über Uhren, mit denen sie Ereignissen  $i$  auf ihrer Weltlinie Koordinaten  $(x = 0, t = T_i)$  zuordnen.
- (v) Die Beobachter können Licht/Radarstrahlen aussenden und empfangen. Wenn ein zur Zeit  $t_0$  ausgesendeter Lichtstrahl vom Ereignis  $E$  reflektiert wird und zur Zeit  $t_1$  zurückkehrt, dann hat das Ereignis  $E$  für den Beobachter zur Zeit  $(t_0 + t_1)/2$  in der Entfernung  $(t_1 - t_0)/2$  stattgefunden.



Aus diesen Annahmen ist nun die metrische Struktur der Raumzeit – insbesondere der Zusammenhang zwischen den Koordinaten und Maßstäben/Uhren verschiedener inertialer Beobachter – abzuleiten.

Sei die Relativgeschwindigkeit zwischen A und B gleich  $v$  und mögen sie sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  gerade begegnen und beide ihre Uhren auf Null stellen. Zum Zeitpunkt  $t$  sendet A ein Signal, welches von B reflektiert wird (Ereignis P). Zu diesem Zeitpunkt zeigt die Uhr von B also die Zeit  $Kt$  an. Wenn das reflektierte Signal A erreicht, zeigt dessen Uhr demnach den Zeitpunkt  $K^2t$  an. Beobachter A hat also zur Zeit  $t$  ein Radarsignal ausgesendet, das reflektiert wurde und die Zeit  $(K^2 - 1)t$  unterwegs war. Damit schreibt A dem Ereignis P die Entfernung  $X = \frac{1}{2}(K^2 - 1)t$  zu und es hat für ihn (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) genau in der Mitte zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $K^2t$ , also zur Zeit  $T = \frac{1}{2}(K^2 + 1)t$  stattgefunden. Damit ist also die Relativgeschwindigkeit zwischen A und B gleich



$$v = \frac{X}{T} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \quad (3.1)$$

<sup>2</sup>für den Fall der Bewegung längs der Ausbreitungsrichtung des Signals, den sogenannten *radialen* Dopplereffekt

Da  $K > 1$  wenn sich Beobachter voneinander entfernen, ergibt die Umstellung nach  $K$

$$K = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \quad (3.2)$$

als Faktor der beobachteten Zeitdehnung bzw. Frequenzänderung im (radialen) relativistischen Dopplereffekt.

### 3.2 Addition von Geschwindigkeiten

Betrachten wir drei Inertialsysteme  $A, B, C$ , wobei sich  $B$  von  $A$  mit der Geschwindigkeit  $v_{AB}$  und  $C$  in derselben Richtung von  $B$  mit der Geschwindigkeit  $v_{BC}$  entfernt. Nach Galilei würde  $A$  dem System  $C$  die Geschwindigkeit  $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$  zuschreiben.

Wir lassen wieder Beobachter  $A$  Signale in Richtung von  $B$  und  $C$  senden und erkennen, daß die  $K$ -Faktoren multiplikativ sind:  $K_{AC} = K_{AB}K_{BC}$ . Daraus folgt mit Gl. (3.1)

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}} \quad (3.3)$$

Für Geschwindigkeiten  $v \ll 1$  geht dies in die klassische Formel über, für  $v_{AB} = v_{BC} = 1$  ergibt sich jedoch auch  $v_{AC} = 1$ .

Allgemeiner gilt: für  $v_{AB} \leq 1$  und  $v_{BC} \leq 1$  ist stets auch  $v_{AC} \leq 1$ .

Bei der Interpretation muß man beachten, daß  $v_{AC}$  die Relativgeschwindigkeit zwischen  $A$  und  $C$  ist, die Beobachter  $A$  (z.B. mit Hilfe von in seinem Inertialsystem synchronisierten Uhren und Helfern, die beim Vorbeiflug von  $C$  an den Uhren die Zeit ablesen) mißt. Natürlich ist  $v_{CA} = v_{AC}$ , Beobachter  $C$  findet die gleiche Geschwindigkeit, wenn er auf dieselbe Weise die Geschwindigkeit von  $A$  mißt.

Wenn jedoch Beobachter  $B$  in seinem Inertialsystem die Geschwindigkeit zwischen  $A$  und  $C$  mißt (die auf der Skizze beide von ihm wegfliegen), so findet er als Ergebnis selbstverständlich

$$v_{AC}^{\text{gemessen von } B} = v_{AB} + v_{BC} \quad (3.4)$$

und diese kann auch größer als 1 sein.

In der relativistischen Kinematik verwendet man statt der Geschwindigkeiten auch gerne die *Rapidity*  $\eta$

$$\eta = \text{artanh}(v). \quad (3.5)$$

Sie nimmt für  $0 \leq v < 1$  Werte im Bereich  $0 \leq \eta < \infty$  an und  $\eta = 7$  ist übersichtlicher als  $v=0.999998$ . Außerdem folgt aus Gl. 3.3

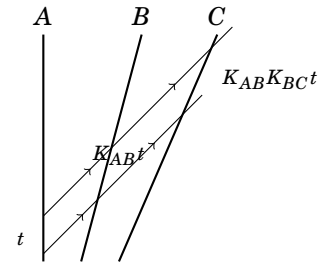
$$\eta_{AC} = \eta_{AB} + \eta_{BC} \quad (3.6)$$

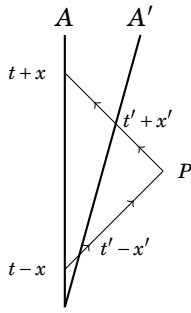
denn es ist

$$K = e^\eta. \quad (3.7)$$

### 3.3 Lorentz-Transformationen

Ein Ereignis hat in unserem Inertialsystem die Koordinaten  $(x, t)$ , wenn ein von uns am Ort  $x = 0$  zur Zeit  $t - x$  gesendetes Radarsignal von diesem Ereignis reflektiert wurde und zur Zeit  $t + x$  zurückkehrte. Betrachten wir zwei Systeme  $A$  und  $A'$  mit Relativgeschwindigkeit  $v$ , die im Moment der Begegnung ihres





räumlichen Koordinatenursprungs ihre Uhren auf Null stellten. Einem Ereignis  $P$  ordnen  $A$  und  $A'$  in ihrem jeweiligen Koordinatensystem die Koordinaten  $(x, t)$  bzw.  $(x', t')$  zu. Dann sieht man aus der Abbildung, daß

$$t' - x' = K(t - x) \quad \text{und} \quad t + x = K(t' + x') \quad (3.8)$$

Mit Gl. (3.2) erhält man daraus

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.9)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.10)$$

Dies ist die Lorentz-Transformation, die in der Speziellen Relativitätstheorie an die Stelle der Galilei-Transformation Gl. (2.1),(2.2) tritt.

Die Lorentz-Transformation läßt sich mit Hilfe der Rapidität  $\eta$  (und  $K = e^\eta$ ) in der Form

$$t' = t \cosh \eta - x \sinh \eta \quad (3.11)$$

$$x' = -t \sinh \eta + x \cosh \eta \quad (3.12)$$

und mit Hilfe des Lorentzfaktors

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \cosh \eta \quad (3.13)$$

in der Form

$$t' = \gamma(t - vx) \quad (3.14)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3.15)$$

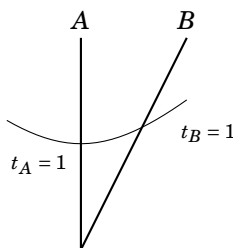
schreiben. Multipliziert man die beiden Gleichungen (3.8) miteinander, erhält man

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2. \quad (3.16)$$

Dieser Ausdruck ist also invariant unter Lorentz-Transformationen, für ihn erhalten also Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen den gleichen Wert.

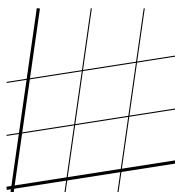
Mit dieser Beobachtung wissen wir nun endlich, in welcher Beziehung die Einteilung der Koordinatenachsen verschiedener Beobachter zueinander stehen: Den Punkt  $(t_B, x_B) = (1, 0)$  erhalten wir als den Schnittpunkt der Weltlinie von  $B$  mit der Hyperbel  $t_A^2 - x_A^2 = 1$ .

Mit dieser Eichung der Achsen ist es nun auch möglich, alle bisher gezeichneten Skizzen zum  $K$ -Faktor, wie z.B. das linke Bild in Abb. 3.1, mit konsistenten Maßen zu zeichnen.

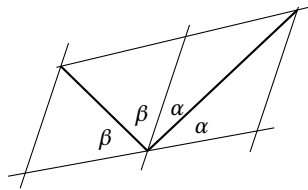


Bisher haben wir in unseren Skizzen die  $x$ -Achsen vernachlässigt. Zur Vervollständigung des geometrischen Bildes führen ein paar einfache Beobachtungen, wobei wir zunächst bei einer Raumdimension bleiben. Ein Lichtstrahl kann also entweder nach rechts oder nach links gerichtet sein, der Lichtkegel degeneriert zu 2 Strahlen.

Für einen Beobachter bilden die Punkte konstanter Zeit oder konstanten Ortes zwei Parallelscharen. Wir haben unsere Einheiten (Fuß und Nanosekunde) so gewählt, daß diese Scharen gleiche Abstände haben. Die Koordinatenlinien bilden also Rhomben (Rauten) mit gleich langen Seiten. Ein Lichtstrahl läuft

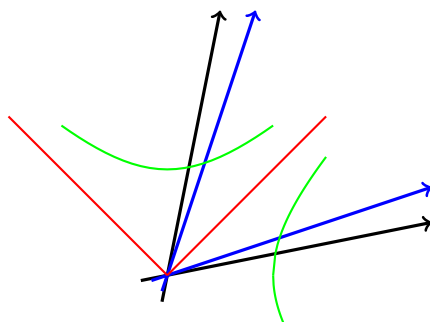


entlang der Winkelhalbierenden. Daraus folgt, daß der nach rechts und der nach links gerichtete Lichtstrahl in unserem Diagramm einen rechten Winkel bilden müssen:



$$2\alpha + 2\beta = \pi, \text{ also } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Damit empfiehlt es sich, den Lichtkegel im Diagramm stets mit  $45^\circ$  Neigung einzuzeichnen. Für ein zweites Inertialsystem muß der Lichtkegel ebenfalls den Winkel zwischen  $x$ - und  $t$ -Achse halbieren. Die Eichung der  $x$ - und  $t$ -Achsen wird durch die Hyperbeln  $t^2 - x^2 = \pm 1$  vorgegeben. Damit ergibt sich folgendes Diagramm für die Koordinatenachsen zweier Bezugssysteme:



blau: Inertialsystem A  
 schwarz: Inertialsystem B  
 rot: Lichtkegel  
 grün: Hyperbeln  $t^2 - x^2 = \pm 1$ , welche die Achsen bei  $t_A = 1, t_B = 1$  bzw.  $x_A = 1, x_B = 1$  schneiden

Räumliche Dimensionen senkrecht zur Bewegungsrichtung sind unter Lorentz-Transformationen invariant. Damit lauten die vollständigen Transformationsformeln für einen *Lorentz-Boost* in  $x$ -Richtung:

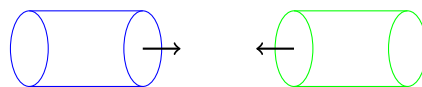
$$t' = \gamma(t - vx) \quad (3.17)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3.18)$$

$$y' = y \quad (3.19)$$

$$z' = z \quad (3.20)$$

Die Lorentzinvarianz von Dimensionen quer zur Bewegungsrichtung kann man leicht einsehen. Man stelle sich 2 zylinderförmige Röhren mit gleichem Radius vor, die sich aufeinander zu bewegen:



Gäbe es eine Längenkontraktion in Querrichtung, würde ein Beobachter, der sich mit der blauen Röhre bewegt, beobachten, daß die grüne Röhre dünner ist und bei der Begegnung in die blaue Röhre eindringt. Ein Beobachter, der sich mit der grünen Röhre bewegt, würde dagegen beobachten, daß die blaue Röhre in die grüne Röhre rutscht. Dies ist offenbar nicht möglich. Eine Kontraktion in Querrichtung ist mit der Äquivalenz aller Inertialsysteme nicht verträglich.

Die von einem Inertialsystem zur Lokalisierung von Ereignissen im Minkowski-Raum verwendeten Koordinaten  $(t, x, y, z)$  werden im Weiteren auch als  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  geschrieben. Für Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  benutzen wir Vektorpfeile  $\vec{w}$ , für Vektoren im Minkowski-Raum  $\mathbb{R}^{3,1}$  dagehen Fettdruck:  $\mathbf{w} = (w_0, \vec{w})$ .

Für einen beliebigen Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  zerlegen wir  $\vec{r} = (x, y, z)$  in einen Anteil  $\vec{r}_{\parallel}$  parallel zu  $\vec{v}$  und einen Anteil  $\vec{r}_{\perp}$  senkrecht zu  $\vec{v}$ :

$$t' = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{r}) = \gamma(t - v|\vec{r}_{\parallel}|) \quad (3.21)$$

$$\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t) \quad (3.22)$$

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \quad (3.23)$$

Diese Lorentz-Transformation bezeichnen wir auch als  $L(\vec{v})$  oder  $L(\vec{n}, \eta)$ , wobei der Vektor  $\vec{n}$  die Richtung der Relativbewegung anzeigt und  $\eta$  die Rapidität der Relativbewegung ist.

Sei  $\mathbf{x} = (t, \vec{x})$  ein Vektor im Minkowski-Raum mit den Koordinaten  $t, x_1, x_2, x_3$ , d.h., er zeigt vom Koordinatenursprung zu einem Ereignis mit den Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Analog zu Gl. (3.16) sieht man, daß die quadratische Form

$$g(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -t^2 + |\vec{x}|^2 \quad (3.24)$$

lorentzinvariant ist.

### 3.4 Skalarprodukt im Minkowski-Raum

Aus dem  $\mathbb{R}^3$  sind wir gewohnt, daß es ein Skalarprodukt  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  von Vektoren gibt, welches unter den Symmetrien des Raumes (Drehungen, Translationen) invariant ist, da es sich geometrisch durch Längen und Winkel ausdrücken läßt:  $\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}||\vec{w}|\cos \angle(\vec{u}, \vec{w})$ . Es ist symmetrisch und linear in seinen Argumenten,  $(\vec{u} + \lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{w}$  und in kartesischen Koordinaten hat es die Form  $\vec{u} \cdot \vec{w} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z$ . Eine solche *invariante symmetrische Bilinearform*  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  existiert auch im Minkowski-Raum  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Sie ist nicht nur gegenüber Drehungen in den 3 Raumdimensionen invariant, sondern auch gegenüber Lorentz-Transformationen. Dazu verallgemeinert man die lorentzinvariante quadratische Form  $g(\mathbf{x})$  aus Gl. (3.24) zur Bilinearform

**Bilinearform**

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = -x_0 y_0 + \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (3.25)$$

Diese Bilinearform ist ebenfalls lorentzinvariant.

*Beweis.* Aus Bilinearität und Symmetrie folgt für beliebige  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - g(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= g(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - g(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &\quad - g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= 4g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Da die linke Seite invariant ist, ist die rechte Seite auch invariant. □

Ein solches Skalarprodukt, welches nicht die übliche Forderungen, (i)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  und (ii)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$ , erfüllt, heißt *indefinites Skalarprodukt*.

**zeitartig,  
raumartig,  
lichtartig,  
kausal**

**Definition 3.4.1.** Ein Vektor  $\mathbf{x}$  sei der Verbindungsvektor von 2 Ereignissen  $P$  und  $Q$ .

- (i) Wenn  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$ , heißt  $\mathbf{x}$  *zeitartig* und die Ereignisse  $P$  und  $Q$  *liegen zeitartig zueinander*.
- (ii) Wenn  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ , heißt  $\mathbf{x}$  *lichtartig* und  $P, Q$  *liegen lichtartig zueinander*.
- (iii) Wenn  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq 0$ , heißt  $\mathbf{x}$  *kausal* und  $P, Q$  *liegen kausal zueinander*.
- (iv) Wenn  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ , heißt  $\mathbf{x}$  *raumartig* und  $P, Q$  *liegen raumartig zueinander*.

Die Menge aller lichtartigen Vektoren bilden den *Licht(doppel)kegel*, die zeitartigen Vektoren das Innere des Lichtkegels. Die Mengen der Vektoren mit konstanten „Längenquadrat“  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r \neq 0$  bilden Hyperboloide. Für  $r < 0$  ist das Hyperboloid zweischalig, mit je einer Schale im Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel. Für  $r > 0$  ist es (in mehr als einer Raumdimension!) einschalig.

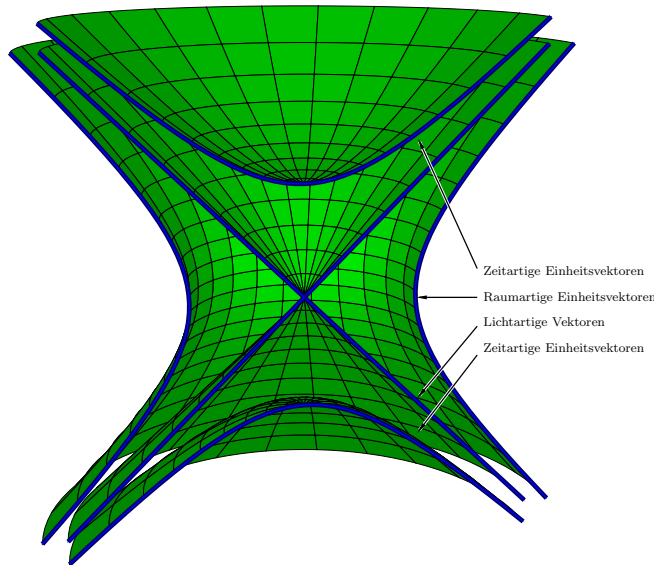


Abb. 3.2: Lichtkegel und Hyperboloide von Einheitsvektoren

Ein Skalarprodukt definiert *Orthogonalität*: Zwei Vektoren sind orthogonal,  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ , wenn  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ .

### Orthogonalität

- (i) Sei  $\mathbf{v}$  zeitartig und  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ . Dann ist  $\mathbf{w}$  raumartig. Der orthogonale Unterraum zu  $\mathbf{v}$ , d.h.,  $\mathbf{v}^\perp = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \perp \mathbf{v}\}$ , wird von 3 raumartigen Vektoren aufgespannt.
- (ii) Sei  $\mathbf{v}$  lichtartig. Dann ist  $\mathbf{v}$  orthogonal zu sich selbst. Wenn  $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ , dann ist  $\mathbf{w}$  entweder proportional zu  $\mathbf{v}$  oder raumartig. Mit anderen Worten:  $\mathbf{v}^\perp$  wird von  $\mathbf{v}$  selbst und zwei raumartigen Vektoren aufgespannt.
- (iii) Sei  $\mathbf{v}$  raumartig. Dann wird  $\mathbf{v}^\perp$  von einem zeitartigen und zwei raumartigen Vektoren aufgespannt, enthält also auch lichtartige Vektoren.

Wir werden das Skalarprodukt auch mit Punkt schreiben:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.26)$$

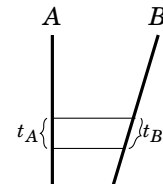
## 3.5 Zeitdilatation und Längenkontraktion

Durch die Lorentz-Transformation der Koordinaten zweier Ereignisse kann man den unterschiedlichen Uhrengang ohne Laufzeiteffekte berechnen:

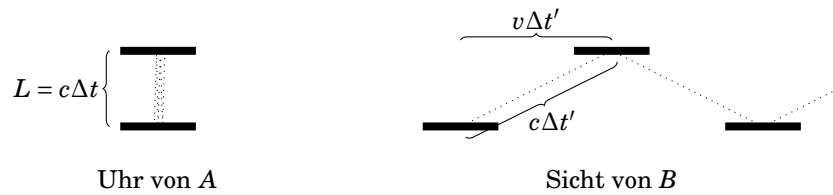
$$(T, \vec{0}) \mapsto (T', \vec{x}') = (\gamma T, -\gamma \vec{v} T) \quad (3.27)$$

und findet so:

Die relativ zum Beobachter bewegte Uhr geht um den Faktor  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  langsamer als die Uhr des Beobachters.



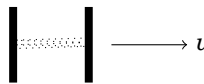
Ein anderer Weg zu diesem Ergebnis ist die Analyse einer Lichtuhr:  $A$  hat zwei parallele Spiegel im Abstand von einem Fuß und beobachtet einen Lichtblitz, der senkrecht zu den Spiegeln hin- und her läuft. Jede Reflektion entspricht einem Tick der Lichtuhr im Takt von einer Nanosekunde.  $B$  beobachtet die Lichtuhr in seinem Bezugssystem:



Aus der Sicht von  $B$  ist  $(c\Delta t')^2 = L^2 + (v\Delta t')^2$ , also mit  $\Delta t = L/c$ :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t. \quad (3.28)$$

**Längenkontraktion.** Lassen wir nun  $A$  seine Lichtuhr umkippen, so daß der Lichtstrahl in der Richtung der Relativbewegung von  $B$  läuft.



Da sich von  $B$  aus gesehen der Lichtstrahl mit  $c$  und die beiden Spiegel mit  $v$  bewegen, dauert ein Vorwärtslauf des Lichtstrahls für  $B$

$$\Delta t'_{\text{vorwärts}} = \frac{L'}{c - v} \quad (3.29)$$

und ein Rückwärtslauf des Lichtstrahls

$$\Delta t'_{\text{rückwärts}} = \frac{L'}{c + v}, \quad (3.30)$$

die Gesamtzeit für einen Umlauf des Lichts ist also

$$\Delta t'_{\text{total}} = \frac{2cL'}{c^2 - v^2} = 2\gamma^2 \frac{L'}{c} \quad (3.31)$$

Für den mitbewegten Beobachter  $A$  ist  $\Delta t_{\text{total}} = 2L/c$ . Mit der Zeitdilatation  $\Delta t' = \gamma \Delta t$  finden wir daraus die

*Längenkontraktion in Bewegungsrichtung*

$$L' = \gamma^{-1} L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L \quad (3.32)$$

Um die Längenkontraktion durch Anwendung der Lorentz-Transformation herzuleiten, muß man sorgfältig definieren, was mit einer Längenmessung gemeint ist:

- (i) Die Ausdehnung eines Stabes in seiner Bewegungsrichtung kann man ermitteln, indem man die Vorbeiflugzeiten von Stabanfang und Stabende stoppt. Diese Definition liegt obiger Herleitung mit der gekippten Lichtuhr zugrunde.
- (ii) Äquivalent, aber für beliebige Richtungen anwendbar ist eine andere Definition. Um die Länge eines *bewegten* Stabes zu messen, muß man Stabende und -anfang natürlich gleichzeitig lokalisieren. Also: Die Länge eines Stabes ist der Abstand zweier für den Beobachter gleichzeitiger Ereignisse am Stabanfang und am Stabende.

Betrachten wir also die Weltlinien eines im ungestrichenen System ruhenden Stabes  $x_A(t) = 0, x_B(t) = L$ . Die Koordinaten in beiden Systemen sind:

$$(t, 0) \mapsto (\gamma t, -\gamma vt) \quad (3.33)$$

$$(t, L) \mapsto (\gamma t - \gamma vL, \gamma L - \gamma vt) \quad (3.34)$$

Wir brauchen die Koordinaten der Stabenden  $x'_A(t'), x'_B(t')$  bei gleichem  $t'$ . Am Stabende  $A$  ist  $t' = \gamma t$ , am Stabende  $B$  ist  $t' = \gamma t - \gamma vL$  und damit wird

$$x'_A(t') = -vt' \quad (3.35)$$

$$x'_B(t') = \gamma L - v(t' + \gamma vL) = \gamma(1 - v^2)L - vt' = \gamma^{-1}L - vt'. \quad (3.36)$$

Also ist der bei konstantem  $t'$  gemessene Abstand  $L'$  gleich  $\gamma^{-1}L$ .

Da die transversalen Dimensionen nicht Lorentz-kontrahiert werden, gilt auch für Volumina:

$$V' = \gamma^{-1}V = \sqrt{1 - v^2}V \quad (3.37)$$

Scheinbare Paradoxa ergeben sich aus der Gleichberechtigung der Inertialsysteme:  $A$  sieht  $B$  kontrahiert und  $B$  sieht  $A$  kontrahiert. Ein Beispiel: Ein Zug fährt durch einen Tunnel (oder ein Auto durch eine Garage oder eine Leiter durch eine Scheune). Der ruhende Zug ist etwas länger als der Tunnel. Der Tunnel hat Türen und einen Tunnelwärter. Am Anfang ist Tür  $A$ , durch die der Zug in den Tunnel einfahren wird, geöffnet und Tür  $B$ , durch die der Zug den Tunnel verlassen wird, geschlossen. Der Tunnelwärter schließt Tür  $A$ , sobald das Zugende im Tunnel ist und öffnet Tür  $B$  rechtzeitig wenn die Lok das Tunnelende erreicht. Vom Standpunkt des Tunnelwärters aus ist der Zug Lorentz-kontrahiert und paßt in voller Länge in den Tunnel. Er kann also Tor  $A$  schließen, kurz bevor er Tor  $B$  öffnen muß. Es gibt für ihn einen Zeitraum, in dem der Zug sich völlig im Tunnel befindet und beide Tore geschlossen sind. Im Gegensatz dazu sehen die Zugfahrer den Tunnel kontrahiert. Der Zug paßt nicht vollständig in den Tunnel. Zu keiner Zeit können beide Tore geschlossen sein.

Das ist kein Widerspruch, sondern Ausdruck der Relativität der Gleichzeitigkeit. Während der Tunnelwärter erst den letzten Wagen im Tunnel verschwinden sieht und Tor  $A$  schließt und erst dann Tor  $B$  öffnen muß, da die Lok das Tor erreicht, sehen die Zugfahrer diese beiden Ereignisse in der umgekehrten Reihenfolge. Erst erreicht die Lok Tor  $B$ , dann erst verschwindet das Zugende im Tunnel und Tor  $A$  wird geschlossen.

Dies zeigt auch noch einmal, daß es keine Längenänderung in transversalen Richtungen geben kann, denn darüber, ob der Zug für den Tunnel zu hoch ist, müssen sich Tunnelwärter und Zugreisende einig sein.

Da die Lorentzkontraktion nur in Bewegungsrichtung stattfindet, sind auch Winkel nicht lorentzinvariant. Dies ist wichtig im folgenden Paradoxon<sup>3</sup>.

Ein Stab fliegt in Längsrichtung ( $v_x$ ) über einen Tisch. Ein kreisförmiger Ring, der auf dem Tisch liegt, hebt vom Tisch ab und kommt senkrecht ( $v_z$ ) auf die Flugbahn des Stabes zu. Zu einem bestimmten Zeitpunkt liegt der Stab gerade innerhalb des Rings, er kann knapp durch den Ring durchfliegen. Wie sieht das im Ruhesystem des Stabes aus? Hier erscheint der Ring in Längsrichtung kontrahiert, also elliptisch, und der Stab paßt nicht hindurch?

Tatsächlich ist der Ring im Ruhesystem des Stabes gekippt. Damit paßt der Stab auch hier durch den Ring, allerdings passieren die Stabenden den Ring in diesem Bezugssystem nicht gleichzeitig.

Die Zusammensetzung zweier nicht paralleler Lorentz-Boosts  $L(\vec{v}_1) \circ L(\vec{v}_2)$  mit  $v_1 \nparallel v_2$  ist kein reiner Lorentz-Boost mehr, sondern eine Lorentztransformation, die auch einen Anteil räumlicher Drehung enthält.

Eine andere Frage ist, ob wir ein bewegtes Objekt tatsächlich in Bewegungsrichtung kontrahiert *sehen*. Hier spielen die Laufzeiteffekte eine entscheidende Rolle. Durch das Zusammenwirken von Laufzeiteffekten und Lorentzkontraktion sehen wir ein bewegtes Objekt eher verdreht als zusammengedrückt.

**Zwillingsparadoxon.** Die Symmetrie der Bezugssysteme führt natürlich auch zu Interpretationsschwierigkeiten bei der Zeitdilatation. Alice fliegt mit ihrer

<sup>3</sup>Ferraro, Einstein's Space-Time, Springer 2007

## Volumen

### Garagenparadoxon, ladder paradox

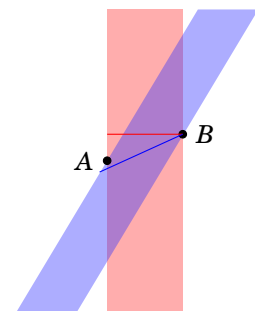
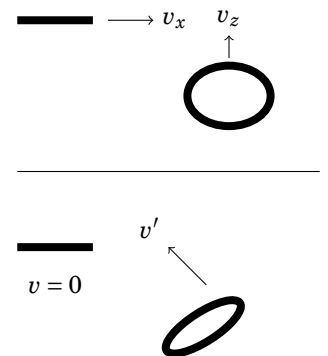


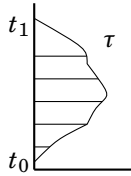
Abb. 3.4: Weltfläche des Tunnels in rot, Weltfläche des Zuges in blau, 2 Linien der Gleichzeitigkeit für Zug und Tunnel.





Rakete los, Bob bleibt auf der Erde. Alice stellt fest, daß Bobs Uhr systematisch nachgeht und Bob stellt dasselbe von Alices Uhr fest. Solange beide in ihren Inertialsystemen bleiben, ist das kein Problem. Aber was passiert, wenn sie sich wieder treffen und ihre Uhren nebeneinander halten können? Wessen Uhr geht dann nach?

Sei  $B$  Bobs Inertialsystem und  $t$  die Zeit, die Bob mißt. Alice bewegt sich auf einer nicht unbedingt inertialen Weltlinie. Die von ihr gemessene Zeit ist die *Eigenzeit* (proper time)  $\tau$ . Infinitesimal gilt



$$dt = \gamma(v(t))d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2(t)}} \quad (3.38)$$

und damit 
$$\Delta\tau = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1-v(t)^2} dt \quad (3.39)$$

für die Gesamtzeit des Fluges nach Borduhr. Da der Faktor im Integrand  $\leq 1$  ist, ist also

$$\Delta\tau < \Delta t. \quad (3.40)$$

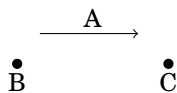
Die Weltlinie, die zwei Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  geradlinig verbindet, also einem Inertialsystem entspricht, ist die Weltlinie *maximaler* Eigenzeit. Auf jeder anderen zeitartigen Weltlinie vergeht weniger Eigenzeit zwischen den Ereignissen  $E_1$  und  $E_2$ . Die reisende Alice ist bei ihrer Rückkehr tatsächlich jünger als Bob.

### MMIS

Es sei darauf hingewiesen, daß hinter Gl. (3.38) ein weiteres **physikalisches** Prinzip steht. Wir studieren ein Nichtinertialsystem, indem wir es *lokal* und *für kurze Zeiten* durch ein *momentan mitbewegtes Inertialsystem* MMIS approximieren. Wir postulieren, daß eine beschleunigte Uhr genauso tickt, wie eine Uhr in diesem momentan mitbewegten Inertialsystem.

Es wäre auch denkbar, daß für Nichtinertialsysteme  $d\tau = \sqrt{1-v^2} dt$  modifiziert werden muß zu  $d\tau = \sqrt{1-v^2 + (\text{Terme mit } \dot{v}, \ddot{v}, \dots)} dt$ . Es ist ein (natürlich experimentell überprüfter) nichttrivialer Fakt, daß dies nicht so ist.

Damit haben wir das Prinzip der *globalen* Lorentz-Invarianz verallgemeinert zur *lokalen Lorentz-Invarianz*: Auch in momentan mitbewegten Inertialsystemen gelten dieselben physikalischen Gesetze. Die Kenntnis der Gesetze der Physik in Inertialsystemen reicht daher aus, um die Gesetze der Physik in beliebigen Systemen abzuleiten. Dies ist ein Aspekt des *Äquivalenzprinzips* der ART.



Kehren wir noch einmal zur Situation in Inertialsystemen zurück. Bob und Charlie befinden sich in einem gemeinsamen Inertialsystem, allerdings weit voneinander entfernt. Sie haben ihre Uhren synchronisiert. Alice befindet sich in einem Inertialsystem, das sich bezüglich Bob und Charlie bewegt. Alice kommt erst bei Bob vorbei und stellt im Moment der Begegnung ihre Uhr nach der von Bob. Bob wird nach einer Weile feststellen: „Wenn meine Uhr  $\gamma N$  Stunden anzeigt, zeigt Alices Uhr erst  $N$  Stunden an“ und Alice wird feststellen: „Wenn meine Uhr  $\gamma N$  Stunden anzeigt, zeigt Bobs Uhr erst  $N$  Stunden an.“ Nun kommt Alice bei Charlie vorbei. Sie können ihre Uhren direkt vergleichen. Da Charlies Uhr mit Bobs Uhr synchron ist, werden sie also eindeutig feststellen: Alices Uhr geht nach. Bei ihr sind  $N$  Stunden vergangen, Charlies Uhr zeigt bereits  $\gamma N$  Stunden an. Trotzdem ist Alice der Meinung, daß auch Bobs Uhr nachgeht, bei ihm sind aus ihrer Sicht erst  $N/\gamma$  Stunden vergangen. *Dies ist kein Widerspruch, sondern Ausdruck der Relativität der Gleichzeitigkeit.* Alice war nie der Meinung, daß die Uhren von Bob und Charlie synchron seien. Von Alices Inertialsystem aus gesehen ging Bobs Uhr schon immer um gleichbleibend  $(\gamma - \frac{1}{\gamma})N$  Stunden gegenüber Charlies Uhr vor!

Der von Alice gesehene Unterschied zwischen Bobs und Charlies Uhr ist  $\Delta t = (\gamma - \frac{1}{\gamma})\tau$  und mit  $\tau = \frac{L}{\gamma v}$ , wobei  $L$  der Abstand zwischen Bob und Charlie in

deren Ruhesystem ist, ergibt sich<sup>4</sup>  $\Delta t = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{L}{v} = Lv$ .

Zeitdilatation ist damit äquivalent zur *Relativität der Gleichzeitigkeit*:

Zwei in ihrem Ruhesystem synchronisierte und um den Abstand  $L$  voneinander angeordnete Uhren sind in einem System, welches sich mit Geschwindigkeit  $v$  längs der Verbindungslinie bewegt, nicht synchron. Sie ticken im gleichen Takt aber die hintere Uhr geht um den Betrag  $Lv$  vor.

Dies wirft die Frage auf: Was passiert, wenn 2 Uhren zeitweise in Richtung ihres Verbindungsvektors beschleunigt und dadurch in ein anderes Inertialsystem befördert werden? Wieso fallen sie dabei außer Takt?

Wir befinden uns in einem Inertialsystem. Eine Uhr befindet sich im Abstand  $L$  über einer anderen Uhr, die Uhren sind synchronisiert. Nun werden die Triebwerke an beiden Uhren gezündet und sie starten nach oben. Die Beschleunigung erfolge so, daß für uns die (erst ansteigende, dann wieder null werdende) Beschleunigung und damit auch die Geschwindigkeit beider Uhren zu jedem Moment dieselbe ist. Damit ticken die Uhren für uns zwar immer langsamer, aber im Gleichtakt. Sie bleiben für uns synchronisiert und ihr Abstand bleibt konstant gleich  $L$ .

Für die Mitreisenden sieht es anders aus: wenn sie Lichtsignale austauschen, stellen sie fest, daß die Lichtsignale von der unteren Uhr oben rotverschoben ankommen, da die Geschwindigkeit des oberen Beobachters zur Ankunftszeit des Lichtsignals größer ist, als die Geschwindigkeit des unteren Beobachters zur Zeit des Abschickens: die obere Uhr tickt schneller als die untere.

Bildlich gesprochen dreht sich durch die Beschleunigung die Ebene der Gleichzeitigkeit im Minkowski-Diagramm.

Nachdem die Triebwerke abgebrannt sind, sind die Uhren wieder in einem gemeinsamen Inertialsystem und ticken für die Mitreisenden wieder im gleichen Takt – aber *in diesem Inertialsystem* geht die untere (hintere) Uhr nach,<sup>5</sup> da sie während der Beschleunigungsphase zu jedem Zeitpunkt (Gleichzeitigkeit im MMIS) langsamer tickte. Wenn die Mitreisenden in diesem Inertialsystem nun die Uhren neu synchronisieren, müssen sie die untere Uhr vorstellen – also geht nun *für uns* diese untere (hintere) Uhr um diesen Betrag vor.

## 3.6 Die Lorentzgruppe

Der Minkowski-Raum ist ein affiner Raum. Auf dem zugehörigen Vektorraum ist ein (nicht positiv definites) Skalarprodukt gegeben durch die bilineare Form  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , welche sich in der Standardbasis (Inertialsystem) als

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{a,b=0}^4 g_{ab} v^a w^b \quad \text{mit} \quad g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

schreiben läßt.

**Definition 3.6.1.** Die *Lorentzgruppe*  $\mathcal{L}$  (auch als  $O(3,1)$  bezeichnet) ist die Gruppe aller linearen Transformationen  $\mathbf{v} \mapsto L\mathbf{v}$  des 4-dimensionalen Vektorraumes  $\mathbb{R}^{3,1}$ , die die Form  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  invariant lassen:

$$g(L\mathbf{v}, L\mathbf{w}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (3.42)$$

In der Standardbasis ist dies also die Matrixgruppe von  $4 \times 4$ -Matrizen  $L^a_b$ , für die gilt  $L^\top g L = g$  oder  $\sum_{b,c} (L^\top)_a^b g_{bc} L^c_d = g_{ad}$ .

<sup>4</sup> Auch wenn Alice zu Fuß geht ( $v \sim 5 \times 10^{-9}$ ), kann, wenn der Weg lang genug ist ( $\sim 23000$  Lichtjahre), eine Stunde Zeitdifferenz herauskommen.

<sup>5</sup> In diesem Inertialsystem hat sich auch der Abstand der Uhren vergrößert (sonst hätte er in unserem System nicht gleich bleiben können). Dies wird auch als Bellsches Paradoxon bezeichnet.

**Beispiel 3.6.2** (Beispiele für Lorentz-Transformationen).

(i) Zeitumkehr:  $\mathcal{L} \ni T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Raumspiegelung:  $\mathcal{L} \ni P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) Sei  $R \in SO(3)$  eine Drehmatrix, z.B. die Drehung um die  $x$ -Achse  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ . Dann ist  $L_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$  ein Element der Lorentzgruppe, denn

$$L^\top g L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^\top R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = g \quad (3.43)$$

da  $R^\top R = I$  für orthogonale Matrizen.

(iv) Lorentz-Boosts:  $\mathcal{L} \ni L = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Allgemeiner: der Lorentz-Boost  $L(\vec{n}, \eta)$  aus Gl. (3.21)-(3.23) in Richtung des Einheitsvektors  $\vec{n}$  mit Rapidität  $\eta$

Wegen  $-1 = \det g = \det(L^\top g L) = \det L^\top \det g \det L = -(\det L)^2$  ist  $\det L = \pm 1$ .

Ein  $L \in \mathcal{L}$  läßt sich schreiben als  $L = \begin{pmatrix} L_0^0 & \vec{v} \\ \vec{w} & R \end{pmatrix}$ . Damit wird die 00-Komponente von  $g = L^\top g L$  zu

$$-1 = |\vec{w}|^2 - (L_0^0)^2 \quad (3.44)$$

$$\text{und damit} \quad (L_0^0)^2 \geq 1 \quad (3.45)$$

Damit ist klar, daß die Lorentzgruppe in mindestens 4 nicht stetig zusammenhängende Teile zerfällt, je nachdem, ob  $\det L$  gleich +1 oder -1 und ob  $L_0^0 \geq +1$  oder  $L_0^0 \leq -1$  ist. Tatsächlich gilt:

**Satz 3.6.3.** Die Lorentzgruppe besteht aus 4 Zusammenhangskomponenten:

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{L \in \mathcal{L} \mid \det L = +1, L_0^0 \geq 1\}$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \{L \in \mathcal{L} \mid \det L = +1, L_0^0 \leq 1\} = T \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \{L \in \mathcal{L} \mid \det L = -1, L_0^0 \geq 1\} = P \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \{L \in \mathcal{L} \mid \det L = -1, L_0^0 \leq 1\} = PT \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Man nennt

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \text{ die eigentliche Lorentzgruppe,}$$

$$\mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \text{ die zeitorientierungserhaltende (orthochrone) Lorentzgruppe und}$$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \text{ (die Komponente, die das Einselement der Gruppe enthält) die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe.}$$

Alle Lorentz-Transformationen erhalten den Lichtkegel. Die orthochronen Lorentz-Transformationen erhalten das Innere des Vorwärtslichtkegels ebenso wie das Innere des Rückwärtslichtkegels. Die nicht orthochronen Transformationen vertauschen dies gerade.

**Satz 3.6.4.** Es gilt  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{w})$  genau dann, wenn es eine Lorentz-Transformation  $L$  gibt mit  $L\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ) ist trivial. Wir beweisen ( $\Rightarrow$ ) für zeitartige  $\mathbf{v}$  (und damit  $\mathbf{w}$ ), indem wir die Transformation  $L$  konstruieren. (Der Beweis für licht- und raumartige Vektoren ist weitestgehend analog.) Wir können ein Koordinatensystem so wählen, daß die Zeitachse in Richtung von  $\mathbf{v}$  geht,  $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0, 0)$ . Dann haben wir

immer noch die Freiheit räumlicher Rotationen und verwenden diese dazu, die  $x$ -Achse in Richtung von  $\vec{w}$  zu legen, so daß  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, 0, 0)$  ist. Sei  $\text{sgn } v_0 = \text{sgn } w_0$ , ansonsten ersetzen wir  $L$  durch  $L \circ T$ . Dann ist der Lorentz-Boost  $L(e_1, \eta)$  mit  $\eta = \log \frac{v_0}{w_0 + w_1}$  die gewünschte Transformation. Da  $\mathbf{w}$  zeitartig ist, ist  $|w_0| > |w_1|$ , also das Argument des Logarithmus immer positiv.  $\square$

**Satz 3.6.5.** *Jede eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation  $L \in \mathcal{L}_+^1$  kann als Produkt eines Lorentz-Boosts und einer räumlichen Rotation geschrieben werden:  $L = L(\vec{n}, \eta) \circ L_R$ ,  $L_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ ,  $R \in SO(3)$ .*

*Beweis.* Sei  $e_0 = (1, 0, 0, 0)$  und  $Le_0 = (x_0, \vec{x})$ . Dann gibt es einen Lorentz-Boost  $L(\vec{n}, \eta)$  mit  $L(\vec{n}, \eta)(x_0, \vec{x}) = e_0$ , und zwar der Boost mit  $\vec{n} = \vec{x}/|\vec{x}|$  und  $\eta = \log(x_0 + |\vec{x}|)$ . Damit gilt für  $L' = L(\vec{n}, \eta) \circ L$  also:  $L'e_0 = e_0$ . Eine Lorentztransformation, die  $x_0^2$  nicht ändert, läßt auch  $|\vec{x}|^2$  konstant und ist somit eine reine Drehung. Also ist  $L'$  eine reine Drehung,  $L' = L_R$ . Also ist  $L(\vec{n}, -\eta) \circ L_R = L(\vec{n}, -\eta) \circ L(\vec{n}, \eta) \circ L = \text{id} \circ L = L$  die gewünschte Zerlegung.  $\square$

In 3 Dimensionen hat eine Drehung eine Drehachse als Fixpunktmenge und die dazu orthogonalen Ebenen sind invariant: Punkte in einer solchen Ebene bleiben unter Drehung in dieser Ebene.

In 4 Dimensionen sehen die Lorentz-Boosts und die räumlichen Drehungen sehr ähnlich aus: Bei einer Drehung um die  $z$ -Achse ist die  $xy$ -Ebene invariant und die  $zt$ -Ebene besteht aus Fixpunkten. Bei einem Lorentz-Boost in  $x$ -Richtung ist die  $xt$ -Ebene invariant und die  $yz$ -Ebene besteht aus Fixpunkten. Solche Transformationen (mit einer Ebene aus Fixpunkten und einer orthogonalen invarianten Ebene) nennt man *einfache* Lorentz-Transformationen. Im Unterschied zu 3D ist jedoch nicht jedes Gruppenelement eine einfache Transformation. Eine allgemeine Lorentz-Transformation hat nur einen Fixpunkt, den Ursprung. Es existieren allerdings immer *zwei zueinander vollständig senkrechte und für sich invariante Ebenen*. Deshalb läßt sich jede allgemeine Lorentz-Transformation als Produkt zweier einfacher Transformationen schreiben, wie oben gezeigt.

Beispiel:  $\begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & -\sinh \eta & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ -\sinh \eta & 0 & \cosh \eta & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$  hat die  $ty$ - und die  $xz$ -Ebene als invariante Ebenen.

## Poincaré-Gruppe

Neben Lorentz-Transformationen ist der Minkowski-Raum auch unter Translationen  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$  invariant. Die Transformationen der Form  $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$  bilden die *Poincaré-Gruppe*  $\mathfrak{P}$ . Sie ist das semidirekte Produkt aus der Lorentzgruppe  $\mathcal{L}$  und der Translationsgruppe  $\mathbb{R}^{1,3}$ :

$$\mathfrak{P} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathcal{L} \quad (3.46)$$

$$(\mathbf{x}_0, L) \circ (\mathbf{x}'_0, L') = (\mathbf{x}_0 + L\mathbf{x}'_0, L \circ L') \quad (3.47)$$

Statt von der Lorentzgruppe  $\mathcal{L}$  und Poincaré-Gruppe  $\mathfrak{P}$  wird auch von der *homogenen Lorentzgruppe*  $\mathcal{L}$  und der *inhomogenen Lorentzgruppe*  $\mathfrak{P}$  gesprochen.

## 3.7 Der 4-Vektor der Geschwindigkeit

Sei  $\mathbf{x}(\tau)$  die Weltlinie eines (massiven) Teilchens, parametrisiert durch die Eigenzeit  $\tau$ . Dann ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \quad (3.48)$$

der Vierervektor  $\mathbf{v}(\tau)$  der Geschwindigkeit. In einem momentan mitbewegten Inertialsystem MMIS ist

$$\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0), \quad (3.49)$$

denn das Teilchen bewegt sich nur entlang der Zeitachse. Also ist  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -1$ , der Geschwindigkeitsvektor ist zeitartig mit konstantem Längenquadrat  $-1$ .

In einem anderen Inertialsystem, in dem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, findet man  $v^0 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$  und für die räumlichen Komponenten  $\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \vec{v}$ , also

$$\mathbf{v}^a = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (3.50)$$

Seien  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  die 4-Geschwindigkeitsvektoren zweier Inertialsysteme  $A, B$ . Ihr Skalarprodukt  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  ist invariant, also können wir es im Ruhesystem von  $A$  berechnen. Dann hat  $\mathbf{v}$  also die Form Gl. (3.49) und  $\mathbf{w}$  die Form Gl. (3.50) und wir finden

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\gamma(v), \quad (3.51)$$

wobei  $v$  der Betrag der 3-Relativgeschwindigkeit zwischen den Systemen ist.

### 3.8 Beschleunigte Bewegung

Der 4-Vektor der Beschleunigung ist

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}. \quad (3.52)$$

Aus  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -1 = \text{const.}$  folgt  $\frac{d}{d\tau} g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 = 2g(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ , also ist die Beschleunigung immer orthogonal zur Geschwindigkeit. Daher ist  $\mathbf{a}$  ein raumartiger Vektor;  $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$  wenn  $\mathbf{a} \neq 0$ .

Wie sieht  $\mathbf{a}$  in einem MMIS aus? Die momentane Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\tau_0)$  hat die Form  $(1, 0, 0, 0)$ . Kurze Zeit davor und danach ist

$$\mathbf{v}(\tau_0 \pm \delta\tau) = \left( (1 - \delta v^2)^{-1/2}, \pm (1 - \delta v^2)^{-1/2} \delta \vec{v} \right) = (1, \pm \delta \vec{v}) + O(\delta v^2) \quad (3.53)$$

und damit also im MMIS

$$\mathbf{a} = (0, \vec{a}) \quad (3.54)$$

woraus wir für das Längenquadrat die invariante Formel

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\vec{a}|^2 \quad (3.55)$$

finden.

#### Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Wir berechnen die Weltlinie eines Teilchens, dessen Beschleunigung in den jeweiligen MMIS konstant  $\vec{a} = (a, 0, 0)$  ist. Seien gestrichene Koordinaten  $x', t' = \tau$  die Koordinaten im (ständig wechselnden) MMIS und  $x, t$  die Koordinaten eines inertialen Beobachters. Die differentielle Form der Lorentz-Transformationen Gl. (3.14)(3.15) liefert mit der Abkürzung  $\dot{x} = dx/dt$ :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx)} = \frac{\dot{x} - v}{1 - v\dot{x}} \quad (3.56)$$

$$\text{und damit} \quad a = \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x} - v}{1 - v\dot{x}} \right) \quad (3.57)$$

$$= \gamma \left( \frac{\ddot{x}}{1 - v\dot{x}} + \frac{v\dot{x}(\dot{x} - v)}{(1 - v\dot{x})^2} \right) \quad (3.58)$$

$$= \frac{\ddot{x}}{\gamma(1 - v\dot{x})^2} \quad (3.59)$$

In diesen Ableitungen mußten  $v$  und  $\gamma$  als konstant angesehen werden, da wir Transformationen zwischen Inertialsystemen durchführen. *Jetzt* berücksichtigen wir, daß wir eine Folge von MMISen haben und zu jedem Zeitpunkt  $v = \dot{x}$  ist. Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$a = \frac{\ddot{x}}{(1 - \dot{x}^2)^{3/2}}. \quad (3.60)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind Hyperbeln. Die einfachste Lösungsfamilie, parametrisiert durch die Eigenzeit, ist

$$t = a^{-1} \sinh(a\tau) \quad (3.61)$$

$$x = a^{-1} \cosh(a\tau) \quad (3.62)$$

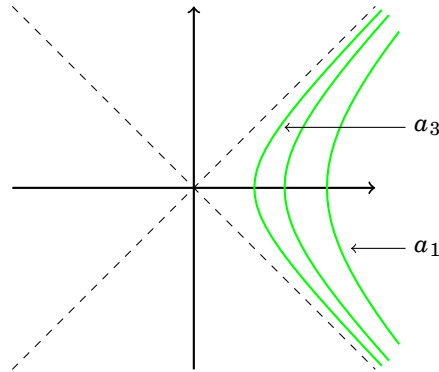


Abb. 3.5: Weltlinien mit konstanten Beschleunigungen  $a_1 < a_2 < a_3$ .

Diese Weltlinien beschreiben Teilchen, die „von Ewigkeit zu Ewigkeit“ konstanter Beschleunigung unterliegen, so daß sie zum Zeitpunkt  $t = 0$  relativ zu unserem Inertialsystem gerade die Geschwindigkeit  $v = 0$  haben und die Stelle  $x = 1/a$  passieren. Dies ist ein recht unphysikalischer Prozess (der z.B. einer unerschöpfliche Energiequelle bedarf).

Die Bewegung mit  $a = \text{const.}$  weist einige interessante Aspekte auf:

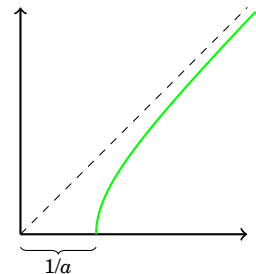
- (i) Es ist  $v = dx/dt = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{\sinh(a\tau)}{\cosh(a\tau)} = \tanh(a\tau)$ . Also wächst die Rapidität proportional zur Eigenzeit,  $\eta = a\tau$  und  $\gamma = \cosh(a\tau) = \sqrt{1 + (at)^2}$ . Damit wird die Eigenzeit, die seit  $t = 0$  verflissen ist, zu

$$\Delta\tau = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1 + (at)^2}} \quad (3.63)$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arsinh}(aT) \quad (3.64)$$

- (ii) Die Erdbeschleunigung,  $g = 9.81\text{m/s}^2$ , ist in natürlichen Einheiten ( $c = 1$ ) etwa gleich  $1/\text{Jahr}$  oder  $1/\text{Lichtjahr}$ . Betrachten wir eine Rakete, die mit dieser Beschleunigung bei  $t = 0$  startet:

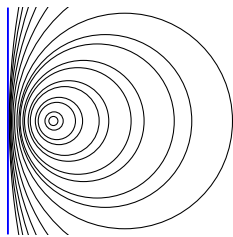
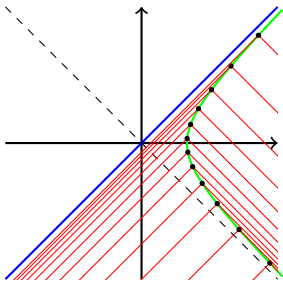
$\tau$ (Jahre)	$t$ (Jahre)	$x$ (Lichtjahre)	$v$
1	1.17	0.54	0.76
2	3.62	2.76	0.964
5	74	73	0.9999
8	1490	1489.5	0.9999998
12	81377	81376.4	0.99999999992



Man kommt also in einigen Jahren Eigenzeit relativ weit.

- (iii) Wie das Diagramm zeigt, kann man mit konstanter Beschleunigung vor einem Lichtstrahl davon laufen. Auch wenn man nie  $v = 1$  erreicht, wird man vom Lichtstrahl nicht mehr eingeholt, wenn man einen Vorsprung  $\geq 1/a$  hat.

### Ereignishorizont



- (iv) Für den beschleunigten Beobachter (bB) gibt es einen *Ereignishorizont*.

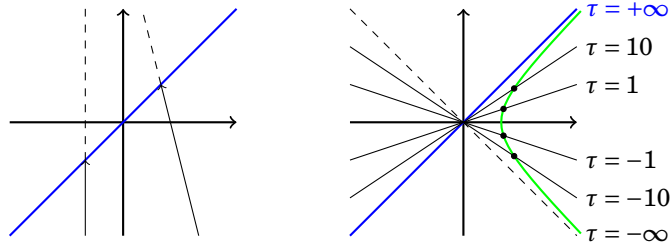
**Definition 3.8.1.** Der *Ereignishorizont* eines Beobachters ist der Rand der Vereinigung aller Rückwärtslichtkegel längs der Weltlinie des Beobachters.

Für einen Beobachter in einem Inertialsystem ist die Vereinigung aller Rückwärtslichtkegel der gesamte Minkowskiraum. Daher gibt es keinen Ereignishorizont. Egal, wie weit ein Ereignis entfernt ist, irgendwann kann die Kunde von diesem Ereignis den Beobachter erreichen.

Unser bB jedoch schafft es, vor Lichtstrahlen davon zu laufen. Die Hyperbene  $x = t$  ist für ihn ein Ereignishorizont. Von Ereignissen jenseits dieser Hyperbene kann ihn keinerlei Signal erreichen.

Der räumliche Schnitt durch den Ereignishorizont bei  $t = \text{const.}$  ist die Ebene  $H_t = \{x, y, z | x = t, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ . Der Schnitt  $t = \text{const.}$  durch den Rückwärtslichtkegel, dessen Spitze zu einer Eigenzeit  $\tau$  gehört, ist eine Kugel. Mit wachsendem  $\tau$  wächst der Radius dieser Kugel gegen Unendlich während der Punkt der Kugel mit der kleinsten  $x$ -Koordinate gegen  $x = t$  konvergiert. Die Einhüllende dieser Kugelschar ist die Ebene  $H_t$ .

Alle Beobachter in Inertialsystemen schneiden irgendwann einmal den Horizont und verschwinden damit für unseren bB aus der beobachtbaren Welt. Keinerlei Signale von dort können ihn mehr erreichen (linkes Bild).



Das rechte Bild zeigt die sich durch die Beschleunigung drehenden Ebenen der Gleichzeitigkeit des bB. Der Punkt  $x = t = 0$  bleibt immer gleichzeitig zum bB und der Abstand zu diesem Punkt, d.h., zum Horizont, bleibt konstant gleich  $1/a$ . Für  $t > 0$  flüchtet der bB vor dem Horizont, einer Ebene im Raum hinter ihm, senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung, die ihn mit Lichtgeschwindigkeit verfolgt. Von der Welt hinter dem Horizont können ihn keinerlei Signale erreichen. Durch sein ständiges Beschleunigen hält er den Abstand zum Horizont konstant auf  $1/a$ . Alle Objekte, die im Gegensatz zu ihm sich nicht durch Beschleunigung retten sondern in Inertialsystemen sind, bleiben hinter ihm zurück und fallen in den Horizont, ohne in jedoch in endlicher Zeit zu erreichen. Dabei werden sowohl sie selbst als auch ihre Uhren immer langsamer. Die Signale, die sie aussenden kommen mit immer größerer Rotverschiebung beim bB an. Für ihn nähern sie sich dem Horizont asymptotisch an und ihre Uhren kommen asymptotisch zum Stillstand.

Für die Beobachter in Inertialsystemen passiert natürlich nichts bemerkenswertes. Sie befinden sich im flachen Minkowskiraum und merken nichts, wenn sie (zu für sie endlicher Eigenzeit) den Horizont durchstoßen.

Auch der bB müsste nur den Fuß vom Gas nehmen und der Horizont würde verschwinden, die Welt hinter dem Horizont würde wieder sichtbar werden weil die Signale von dort ihn wieder einholen könnten.

### 3.9 Relativistische Mechanik

Es ist klar, daß auch die Gesetze der Mechanik modifiziert werden müssen. So kann man durch Beschleunigung eines Massepunktes mit konstanter Kraft keine beliebig hohe Geschwindigkeit erreichen, die Geschwindigkeit nähert sich nur asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit an. Also *wächst die Trägheit eines Körpers mit der Geschwindigkeit.*

Man erwartet:

- (i) Die Gesetze der Mechanik müssen lorentzinvariant, also z.B. mit Hilfe von 4-Vektoren, formuliert werden.
- (ii) Im Grenzfall  $v \ll 1$  erhält man die Newtonschen Gesetze.

Zur Herleitung der Formeln für 4-Impuls und relativistische Energie wird gerne davon ausgegangen, daß die Energie von Photonen  $E = \hbar\omega$  proportional zur Frequenz ist und z.B. Frequenzänderungen zwischen Bezugssystemen durch den  $K$ -Faktor beschrieben werden. Diese Benutzung einer Gleichung der Quantentheorie erscheint etwas unsportlich. Andere Herleitungen analysieren z.B. einen elastischen Stoß aus der Sicht verschiedener Inertialsysteme.

Die folgende recht knappe und elegante Herleitung stammt von Ehlers, Rindler und Penrose:<sup>6</sup>

#### Herleitung von 4-Impuls und relativistischer Energie

##### Annahmen:

- (i) Ein Beobachter ordnet jedem Massepunkt  $i$  eine Energie  $E(v_i, s_i)$  zu, die stetig von der Relativgeschwindigkeit  $v_i$  des Teilchens gegenüber dem Beobachter und gewissen inneren Eigenschaften  $s_i$  des Teilchens abhängt.
- (ii) Erhaltung: Diese Energie eines Systems von Teilchen ist additiv und bleibt (z.B. unter Stößen der Teilchen) erhalten:

$$\sum_{i=1}^N E(v_i, s_i) = \text{const.} \quad (3.65)$$

- (iii) Isotropie: Eine inertielle Quelle emittiere zwei identische Teilchen mit relativ zur Quelle gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtungen. Dann ist die Gesamtenergie  $E = E(v_1, s) + E(v_2, s)$ , die ein Beobachter in einem anderen Inertialsystem diesem Teilchenpaar zuschreibt, von der Lage der Flugachse der Teilchen unabhängig.

Wir schreiben die Energie als Funktion  $E(\gamma_i, s_i)$  des Lorentzfaktors mit  $\gamma_i = \gamma(v_i)$ . Nach Gl. (3.51) ist

$$\gamma_i = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i, \quad (3.66)$$

wobei  $\mathbf{v}$  der 4-Vektor der Geschwindigkeit des Beobachters und  $\mathbf{v}_i$  der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens  $i$  ist.

Wir betrachten ein Teilchenpaar (1,2), das entlang der  $x$ -Achse emittiert wird und ein zweites Teilchenpaar (3,4), welches entlang der  $y$ -Achse emittiert wird. Nach Annahme (iii) muß  $E(v_1) + E(v_2) = E(v_3) + E(v_4)$  sein. Diese Beziehung

<sup>6</sup>J. Ehlers, W. Rindler, R. Penrose, Am. J. Phys. **33**(1965) 995–997



werten wir aus. Im Ruhesystem der Teilchenquelle sind die Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \gamma(u)(1, u, 0, 0); \quad \mathbf{v}_2 = \gamma(u)(1, -u, 0, 0); \quad (3.67)$$

$$\mathbf{v}_3 = \gamma(u)(1, 0, u, 0); \quad \mathbf{v}_4 = \gamma(u)(1, 0, -u, 0) \quad (3.68)$$

und der Beobachter bewege sich relativ zur Quelle entlang der  $x$ -Achse:

$$\mathbf{v} = \gamma(w)(1, w, 0, 0). \quad (3.69)$$

Die Lorentzfaktoren der Teilchen relativ zum Beobachter sind mit  $\gamma_i = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ :

$$\gamma_1 = \gamma(u)\gamma(w)(-1 + uw); \quad \gamma_2 = \gamma(u)\gamma(w)(-1 - uw); \quad (3.70)$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = -\gamma(u)\gamma(w) = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \quad (3.71)$$

Damit gilt laut Annahme (iii) für die Energie der beiden Paare

$$E[\gamma_1] + E[\gamma_2] = E[\gamma_3] + E[\gamma_4] = 2E \left[ \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \right] \quad (3.72)$$

Da sich  $u$  und  $w$  beliebig wählen lassen, muß diese Relation für alle  $1 \leq \gamma_1, \gamma_2 < \infty$  gelten. Die einzige stetige Lösung dieser Funktionalgleichung ist eine affine Funktion. Die Energie muß also die Form

$$E = m\gamma + q \quad (3.73)$$

mit teilchenspezifischen Konstanten  $m$  und  $q$  haben. Die Energieerhaltung (ii) für einen beliebigen Stoß hat damit die Form

$$E = \text{const.} = -\mathbf{v} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i + \sum_i q_i \quad (3.74)$$

Da dies für jeden 4-Vektor  $\mathbf{v}$  erhalten ist, muß jeder der Terme  $\sum m_i \mathbf{v}_i$  und  $\sum q_i$  für sich erhalten sein. Das  $q$  hat also den Charakter einer vom Bewegungszustand unabhängigen ladungsartigen Erhaltungsgröße. Wir haben also gefunden:

- (i) Teilchensorten sind durch einen Parameter  $m$  gekennzeichnet, so daß der 4-Vektor

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i \quad (3.75)$$

bei allen Stößen erhalten bleibt.

- (ii) Die Größe

$$E = m\gamma \quad (3.76)$$

erfüllt die Anforderungen an eine Energiefunktion.

### Interpretation von Energie und 4-Impuls

Für kleine Relativgeschwindigkeiten  $v$  ist

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{mv^2}{2} + O(v^4) \quad (3.77)$$

und der geschwindigkeitsabhängige Teil liefert die klassische kinetische Energie, wenn  $m$  die Masse des Teilchens ist. Es ergibt sich folgendes Bild:

(i) Der 4-Impuls eines Teilchens ist  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

(ii) In einem Inertialsystem, relativ zu dem sich das Teilchen mit  $\vec{v}$  bewegt, hat der 4-Impuls des Teilchens die Form

$$\mathbf{p} = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) = (E, \vec{p}) \quad (3.78)$$

Seine 0-Komponente  $p_0 = m\gamma = E$  ist die Energie, die der Beobachter in diesem Inertialsystem mißt. Etwas allgemeiner: ein Beobachter mit der 4-Geschwindigkeit  $\mathbf{w}$  mißt die Energie  $E = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{p}$ .

Die räumliche Komponente ist der relativistische 3-Impuls  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ .

(iii) Das invariante Längenquadrat ist  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2$  und damit ist

$$E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2 \quad (3.79)$$

(iv) Für masselose Teilchen ist  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0$ , ihr 4-Impuls ist lichtartig und sie bewegen sich stets mit Lichtgeschwindigkeit. Laut Quantentheorie ist für Photonen

$$\mathbf{p} = \hbar(\omega, \vec{k}) \quad (3.80)$$

mit Frequenz  $\omega$  und Wellenvektor  $\vec{k}$ . Der Wellenvektor ist ein Vektor in Ausbreitungsrichtung, dessen Länge indirekt proportional zur Wellenlänge ist:  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ .

(v) Die Geschwindigkeitsvektoren – und damit die Weltlinien – von Teilchen mit Masse sind stets zeitartig. Die Weltlinien von masselosen Teilchen sind lichtartig.

Für ein ruhendes Teilchen liefert Gl. (3.79)  $E = m$ , oder, um es wenigstens einmal hinzuschreiben: " $E = mc^2$ ".

Mitunter wird zwischen der Ruhemasse  $m$  und der *relativistischen Masse*  $m' = m\gamma$  unterschieden, welche mit  $v$  wächst und so die wachsende Trägheit bewegter Körper beschreibt:  $\vec{p} = m'\vec{v}$ .

Eine bessere Interpretation der Äquivalenz von Masse und Energie ist:

(i) Energie ist träge. Bei Beschleunigung erhöht sich die (kinetische) Energie eines Teilchens und damit seine Trägheit.

(ii) Auch ein ruhendes Objekt enthält eine Energiemenge, die für seine Trägheit verantwortlich ist. Diese Energie wird als Masse bezeichnet und ist durch rein mechanische Prozesse nicht umwandelbar. Sie kann jedoch durch andere Prozesse teilweise (Kernspaltung) oder vollständig (Annihilation  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ ) freigesetzt werden.

(iii) Für masselose Teilchen ist  $E = |\vec{p}|$ , ihre gesamte Energie ist kinetisch.

### 3.10 Triviales und nicht ganz triviales zu Überlichtgeschwindigkeiten

(i) Man nehme bei Vollmond einen Laserpointer, der so gut fokussiert, daß er auf dem Mond einen Lichtfleck von einigen Kilometer Durchmesser erzeugt

und wackle damit. Der Lichtfleck bewegt sich auf der Mondoberfläche mit Überlichtgeschwindigkeit hin und her.

Das ist richtig. Jedoch bewegt sich jedes einzelne Photon geradlinig und mit  $v = c$  von der Erde zum Mond. Der Lichtfleck bewegt sich daher mit 1.3 sec Verzögerung gegenüber der Handbewegung.

Daß die Geschwindigkeit des Lichtflecks  $> c$  ist, ist kein Verstoß gegen die SRT. Es heißt nur, daß die Zeit zwischen den Ereignissen „bei A ist es hell“ und „bei B ist es hell“ unter  $\Delta x/c$  liegt.

Dabei wird jedoch nichts – keine Masse, Energie oder Information – von A nach B transportiert. Ein solcher Transport findet nur mit Lichtgeschwindigkeit zwischen der Erde und A bzw. B statt.

Man kann genauso gut eine genügend große Lichterkette mittels voreingestellter Timer so schalten, daß ein mit Überlichtgeschwindigkeit wandernder Lichtfleck entsteht.

- (ii) Man nehme statt des Laserpointers einen genügend langen Stab.

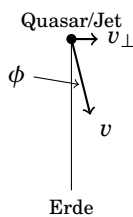
Das ist eine andere Situation. Hier müssten sich die Atome des entfernten Stabendes tatsächlich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, was unmöglich ist. Es gibt daher laut SRT *keinen ideal starren Körper*.

Die Kraftwirkung am unteren Stabende muß über die entsprechenden Kraftfelder von Atom zu Atom weitergeleitet werden und dies geschieht mit endlicher Geschwindigkeit. Der Stab würde sich verbiegen, schlackern, zerbrechen,... aber kein Atom des Stabes läßt sich auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigen.

- (iii) Die Phasengeschwindigkeit von Wellen kann größer  $c$  sein. Das ist im Prinzip nichts anderes als die Geschwindigkeit des Lichtflecks der obigen Lichterkette (die solche laufenden Lichtflecken auch periodisch erzeugen kann). Die Geschwindigkeit des Signal- und Energietransports wird immer  $\leq c$  sein.

- (iv) In Medien mit anormaler Dispersion kann auch die Gruppengeschwindigkeit  $> c$  sein. Ursache ist ein *reshaping* der Welle durch teilweise Absorption: Man nehme einen genügend langen und schnellen Güterzug. Indem man während der Fahrt ständig hinten Wagen abkoppelt, wandert der Schwerpunkt des (Rest-) Zuges nach vorne. So kann man durchaus eine Überlichtgeschwindigkeit dieses Schwerpunktes erreichen – obwohl sich wiederum keinerlei Materie/Energie mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt. Mit ähnlichen Effekten hängt auch die manchmal behauptete Überlichtgeschwindigkeit beim quantenmechanischen Tunneleffekt zusammen.

- (v) Wenn sich ein Objekt mit  $v \lesssim c$  fast in Blickachse auf einen Beobachter zubewegt, kann durch Laufzeiteffekte die vom Beobachter gemessene transversale Projektion  $v_{\perp}$  der Geschwindigkeit größer  $c$  werden: Der (kleine) Winkel zwischen Sichtachse und Bewegungsrichtung sei  $\phi$ . Dann ist der quer zum Beobachter zurückgelegte Weg in der Zeit  $\Delta t$  gleich  $v\Delta t \sin(\phi)$ . Die vom Beobachter gemessene Zeit für diesen Weg reduziert sich allerdings um  $v\Delta t \cos(\phi)$ , da das Signal nach der Zeit  $\Delta t$  einen um  $v\Delta t \cos \phi$  kürzeren Weg zum Beobachter hat:  $\Delta t' = \Delta t - v\Delta t \cos \phi$ . Damit wird  $v_{\perp} = \frac{v \sin \phi}{1 - v \cos \phi}$  und dies kann größer als 1 werden, wenn  $v > 1/\sqrt{2}$  ist.



Dieser Effekt wurde an von Quasaren ausgestoßenen Plasmawolken (Jets) beobachtet. So fand eine Vermessung eines Jets des Quasars 3C273 in den Jahren 1977-80 eine Geschwindigkeit von  $v_{\perp} = 9.7c$ .