Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (14. Serie)

Abgabetermin: 07.02.2019

53. Sei f holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$. Zeige:

a) $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$ in G.
(Funktionen $h = h(x,y)$ mit $h \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$ und $\Delta h = 0$ in G nennt man *harmonisch.*)

b) $u(x_0,y_0) = \dfrac{1}{2\pi r} \oint_{\partial U_r(x_0,y_0)} u(x,y)\,\mathrm{d}s$ für $\overline{U_r(x_0,y_0)} \subset G$.
(Mittelwertformel für harmonische Funktionen)

c) *Sei u harmonisch im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Besitzt u in G ein Maximum (oder ein Minimum), d.h. $u(x_0,y_0) = \sup_{(x,y)\in G} u(x,y)$ (oder $u(x_0,y_0) = \inf_{(x,y)\in G} u(x,y)$) mit einem $(x_0,y_0) \in G$, so ist u konstant in G.*
(Maximum-Minimum-Prinzip für harmonische Funktionen)

d) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, u harmonisch in G mit $u = 0$ auf ∂G, so ist $u \equiv 0$ in G.

54. a) Bestimme für die Funktion $f(z) = \dfrac{7z - 2 - 3i}{z^2 - z - 2}$ mittels Partialbruchzerlegung und Anwendung der Summenformel für die geometrische Reihe jeweils die Laurent-Entwicklung in den Ringgebieten

$$|z| < 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 < |z+1| < 3 \ .$$

b) Berechne mittels Residuenkalkül die Integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ bzw. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+8}$.

55. Zeige folgende Rechenregeln für Residuen:

a) $\operatorname{Res}(af + bg, z_0) = a\operatorname{Res}(f,z_0) + b\operatorname{Res}(g,z_0)$ für $a,b \in \mathbb{C}$.

b) Hat f in z_0 einen einfachen Pol und ist g in $U_r(z_0)$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\operatorname{Res}(fg, z_0) = g(z_0)\operatorname{Res}(f,z_0)\ .$$

c) Hat f in z_0 eine einfache Nullstelle, so gilt $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{f}, z_0\right) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.
Kann eine der Voraussetzungen in b) weggelassen werden?

56. Klassifiziere die isolierten Singularitäten und berechne jeweils das Residuum für die folgenden Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{z^4 - i}{z^2 + 9}$,

b) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{\sin z}$,

c) $f(z) = \dfrac{1 - \exp(2z)}{z^3}$,

d) $f(z) = z^5 \cosh\left(\dfrac{1-i}{4z}\right)$.