Vorlesung Mathematik für Physiker
Analysis 3
Wintersemester 2018/2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (13. Serie)

Abgabetermin: 31.01.2019

49. a) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $z(t) = at + ib\sin(\pi t)$, $t \in [0,1]$ die Parameterdarstellung einer Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$. Berechne die Integrale $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} |z|^2 \mathrm{d}z$ bzw. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 \mathrm{d}z$.

b) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{|z|=1} z^m \bar{z}^n \mathrm{d}z$ für $m, n \in \mathbb{Z}$.

c) Berechne $\displaystyle\int_0^{2+i} z\exp(z^2)\,\mathrm{d}z$ einmal direkt als komplexes Kurvenintegral entlang einer geeigneten Kurve $\mathcal{C}$ und einmal durch Benutzung einer Stammfunktion des Integranden.

50. a) Sei $r > 0$, $w \in \mathbb{C}$ und $|w| \neq r$. Bestimme die Integrale

$$\int_{|z|=r} \frac{\cos(ze^{iz})}{z-w}\,\mathrm{d}z \quad \text{bzw.} \quad \int_{|z|=r} \frac{\sinh(z^2)}{(z-w)^3}\,\mathrm{d}z\ .$$

(*Hinweis*: Fallunterscheidung $|w| < r$ und $|w| > r$ und Anwendung bekannter Formeln)

b) Berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes jeweils das Integral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{4+z^2}\mathrm{d}z$, wenn bei positiver Orientierung von $\mathcal{C}$ gilt:

$$\mathcal{C} = \partial U_2(2i) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{C} = \partial U_2(-2i) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{C} = \partial U_3(0)\ .$$

(*Hinweis*: Zerlegung des Integranden in Partialbrüche)

51. Bestimme jeweils die ersten 4 Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f = f(z)$ um die angegebene Entwicklungsstelle z_0:

a) $f(z) = e^z$, $z_0 = -i\pi$, b) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$, $z_0 = 0$, c) $f(z) = \cot z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Wie groß ist der jeweilige Konvergenzradius?

52. a) Beweise das Minimumprinzip für holomorphe Funktionen:
Sei f holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und habe in G keine Nullstelle. Besitzt $|f|$ in G ein Minimum, d.h. $|f(z_0)| = \inf_{z\in G} |f(z)|$ mit einem $z_0 \in G$, so ist f konstant in G.

b) Sei $G = (0,1) \times (0,1)$ und $f(z) = \dfrac{1}{\sin z + 2i}$. Berechne $\min_{z\in\bar{G}} |f(z)|$.