Vorlesung Mathematik für Physiker
Analysis 3
Wintersemester 2018/2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (12. Serie)

Abgabetermin: 24.01.2019

45. a) Bestimme jeweils alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\exp z = -5 \ , \quad \exp z = i \ , \quad \cos z = 4i \ .$$

b) Sei $S_\theta := \{z \in \mathbb{C} | z = re^{i\theta}, \ r \geq 0\}$ der von 0 ausgehende Strahl mit dem Neigungswinkel $\theta \in [0, 2\pi)$ bez. der reellen Achse. Zeige, dass die Funktion $f(z) = \exp z$ den Streifen $\mathbb{R} \times (\theta, 2\pi + \theta)$ bijektiv auf die "geschlitzte Ebene" $\mathbb{C} \setminus S_\theta$ abbildet.

c) Beweise die Quotientenregel der komplexen Differentiation:
Ist f, g in z_0 komplex differenzierbar und $g(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

46. a) Gib jeweils explizite Formeln für die reellen Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ mit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ an:

$$f(z) = \sinh z \ , \quad f(z) = \cos z \ , \quad f(z) = z^3 + (3 - i)z \ , \quad f(z) = z(\operatorname{Im} z)^2 \ .$$

b) In welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ sind die Funktionen $f(z)$ aus a) komplex differenzierbar? Berechne gegebenfalls die Ableitung $f'(z)$.

47. a) Bestimme diejenige auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ mit

$$u(x, y) = y^2 - x^2 - xy + 4x \ , \ f(i) = 1 \ .$$

b) Untersuche, ob es eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ gibt mit

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy \ , \ f(0) = 0 \ .$$

c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in G holomorphe Funktion, welche dort nur rein imaginäre Werte annimmt. Zeige, dass f in G konstant ist.

48. Unter Verwendung des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus
$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ definiert man die *allgemeine komplexe Potenz*

$$z^a := \exp(a \log z) \qquad \text{für} \quad a \in \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ .$$

Berechne gemäß dieser Definitionen folgende komplexe Zahlen und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene grafisch dar:

a) $\log(2i)$, b) $\log(\sqrt{5} - 2i)$, c) $\log\big(-9\,(\cos(1 + i) + i \sin(1 + i))\big)$,
d) 2^i , e) $(i - \sqrt{3})^{\frac{-1}{4}}$, f) i^i .