Vorlesung Mathematik für Physiker — Hans-Peter Gittel
Analysis 3 — Universität Leipzig
Wintersemester 2018/2019 — Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (11. Serie)

Abgabetermin: 17.01.2019

41. a) Berechne die folgenden Kurvenintegrale mittels Gaußschem Integralsatz. Dabei wird der Rand ∂B des Integrationsbereichs $B \subset \mathbb{R}^2$ als positiv orientiert vorausgesetzt.

$$\oint_{\partial B} 2y\,dx + 6x\,dy\ ,\ B = [0,1] \times [0,1]\ ;\qquad \oint_{\partial B} e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy\ ,\ B = \overline{U_3((0,0))}\ .$$

b) Leite aus dem Gaußschem Integralsatz folgende Formel für den Flächeninhalt $|B|$ her:

$$|B| = \frac{1}{2}\oint_{\partial B} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x\ ,$$

c) Berechne $|B|$, wenn der Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ von dem Bogen der Zykloide (s. Übungsaufgabe 31.b) $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, und der x-Achse eingeschlossen wird.

42. Berechne das Kurvenintegral $\oint_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$, wenn $\mathcal{C}$ die Kreisperipherie ist, welche durch die beiden Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$ beschrieben wird und aus Richtung der positiven x-Achse betrachtet entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn durchlaufen wird,

a) durch Anwendung des Stokesschen Integralsatzes,

b) direkt mittels einer geeigneten Parametrisierung von $\mathcal{C}$.

43. Sei Ω die Kugel mit dem Radius R um den Nullpunkt und n die äußere Einheitsnormale auf $\partial\Omega$. Berechne das Oberflächenintegral $\int_{\partial\Omega}(xy^2, yz^2, zx^2) \cdot n\,\mathrm{d}o$

a) durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes,

b) direkt mittels einer geeigneten Parametrisierung von $\partial\Omega$.

44. Beschreibe die folgenden Mengen komplexer Zahlen z geometrisch und stelle diese Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene grafisch dar:

a) $|z + 1 - 2i| \le 4$, b) $|z + 1| + |z - 1| = 9$, c) $\mathrm{Re}\, z \le \frac{1}{5}$

d) $-\pi < \mathrm{Re}\,(iz) < 0$, e) $\mathrm{Re}\,(z^2) = 1$, f) $\left|\dfrac{z+3}{z}\right| \le 1$.