Vorlesung Mathematik für Physiker | Hans-Peter Gittel
Analysis 3 | Universität Leipzig
Wintersemester 2018/2019 | Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (10. Serie)

Abgabetermin: 10.01.2019

37. a) Sei eine Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben als Graph der Funktion $f \in C^r(G)$ über einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ x_3 = f(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in G\} \ .$$

Bestimme die Gramsche Matrix g, den Normalenvektor $N(x_1, x_2)$ und das skalare Oberflächenelement do von $\mathcal{F}$ bei dieser Parametrisierung.

b) Sei $z = h(x)$, $h(x) \geq 0$ für $x \in (a, b)$, $0 \leq a < b$ und $h \in C^1([a, b])$. Durch Rotation des Graphen von h um die z-Achse entsteht eine Rotationsfläche $\mathcal{R}$. Gib eine zulässige Parametrisierung von $\mathcal{R}$ an.

38. a) Zeige, dass für den Flächeninhalt von $\mathcal{R}$ aus Übungsaufgabe 37.b) gilt:

$$|\mathcal{R}| = 2\pi \int_a^b r\sqrt{1 + h'(r)^2}\,\mathrm{d}r \ .$$

b) Berechne mittels der Formel aus Teil a) den Flächeninhalt einer Kugelsphäre vom Radius R sowie den Inhalt der Oberfläche eines Torus (Kreisrings) vom Radius R und Querschnittsradius $\varrho < R$.

39. Berechne das skalare Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} y\,\mathrm{d}o$,

a) wenn $\mathcal{F}$ die Fläche des Paraboloids $z = 2 - (x^2 + y^2)$ oberhalb der x-y-Ebene ist,

b) wenn $\mathcal{F}$ das Stück der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ist.

40. Berechne das vektorielle Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} w \cdot n\,\mathrm{d}o$, wenn $\mathcal{F}$ die Fläche des Paraboloids $x^2 + y^2 = 2z$, $0 < z < 1$ ist, für die Vektorfelder

a) $w = (-x, -y, 0)$, b) $w = (xy^2, y^3, xyz)$.

Frohe Weihnachten und die besten Wünsche für 2019 !