Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (9. Serie)

Abgabetermin: 20.12.2018

33. Eine reguläre C^1-Kurve $\mathcal{C}$ besitze die Massendichte ρ (Masse pro Längeneinheit). Dann sind die Koordinaten s_i des Schwerpunkts dieser mit Masse belegten Kurve gegeben durch

$$s_i = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} x_i \rho(x)\, ds \qquad (i \in \{1,2,3\}) ,$$

wobei M die Gesamtmasse von $\mathcal{C}$ bezeichnet.

a) Berechne den Schwerpunkt der homogen mit Masse belegten

$$\text{Schraubenlinie} \quad x_1 = r\cos t,\ x_2 = r\sin t,\ x_3 = ht,\ t \geq 0$$

zwischen den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = \frac{3}{2}\pi h$. $(r, h > 0)$

b) Berechne den Schwerpunkt eines Seiltänzers mit Balancierstange, der vereinfachend gegeben ist durch die ebenen Kurvenstücke

$$\mathcal{C}_1 = \{(0,t) | 0 \leq t \leq 1.8\} \ \text{ mit Dichte } \rho_1 = 32 \text{ und}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(t, 1.2 - 0.05t^2) | -4 \leq t \leq 4\} \ \text{ mit Dichte } \rho_2 = 2 .$$

34. Berechne die folgenden Kurvenintegrale einmal für die Verbindungsgerade von $(0,0)$ nach $(1,1)$ und einmal für die Parabel $y = x^2$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$:

$$\text{a)} \quad \int_{\mathcal{C}} x\, dx - 2xy\, dy , \qquad \text{b)} \quad \int_{\mathcal{C}} e^{x+y}\, dx + (e^{x+y} - \ln(1+y^2))\, dy .$$

35. Berechne die geleistete Arbeit, wenn sich ein Massepunkt unter Wirkung des gegebenen ebenen Kraftfelds $F = F(x,y)$ einmal entlang der Parabel $x = y^2$ von $(1,1)$ nach $(4,2)$ und einmal entlang des geschlossenen Polygonzuges durch die Punkte $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,0)$, $(0,0)$ (in dieser Reihenfolge) bewegt:

$$\text{a)} \quad F(x,y) = (xe^y, xy) , \qquad \text{b)} \quad F(x,y) = (x^2+y^2, 2xy) .$$

36. Wenn durch einen Draht, welcher entlang der z-Achse ausgedehnt ist, ein konstanter Strom fließt, entsteht gemäß des Biot-Savartschen Gesetzes ein Magnetfeld mit einem Feldstärkevektor proportional zu $H = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$.

a) Veranschauliche den Verlauf des Vektorfelds H grafisch.

b) Zeige, dass H auf $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2+y^2 > 0\}$ wirbelfrei ist.

c) Bestimme im Halbraum $y > 0$ ein Potential zu H.

d) Ist H ein Potentialfeld auf Ω?
(*Hinweis*: Betrachte $\oint_{\mathcal{C}} H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz$ längs einer Kreislinie in der x-y-Ebene um den Koordinatenursprung.)