Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (8. Serie)

Abgabetermin: 13.12.2018

29. a) Berechne das Integral $\int_B x^2 y \, dxdy$, wobei B der obere Halbkreis mit Radius 2 um $(0,0)$ ist.

b) Berechne das Integral $\int_B xy \, dxdy$, wobei B diejenige beschränkte Teilmenge der Ebene ist, welche von der Parabel $y = x^2$ und von der Geraden $y = x + 2$ eingeschlossen wird.

c) Berechne den Inhalt $|B|$ der Menge

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\} \ .$$

30. Sei $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und $Q_a := [0, a] \times [0, a]$.

a) Zeige: $\displaystyle\int_{K_r} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right)$ und $\displaystyle\int_{Q_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \left(\int_0^a e^{-x^2} \, dx\right)^2$.

b) Folgere aus a): $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(s. Übungsaufgabe 25.b).
(*Hinweis*: In Teil b) Abschätzungen zwischen Integralen über K_r und über Q_a für geeignet gewählte r, a verwenden.)

31. a) Gib jeweils zwei äquivalente Parametrisierungen an für:

die Parabel $y = x^2$, bzw. den Hyperbelast $x^2 = 1 + y^2 \quad (y > 0)$.

b) Bestimme eine Parametrisierung der Zykloide, welche als Bahnkurve des Punktes $(0, 0)$ der Peripherie des Kreises $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ entsteht, wenn dieser Kreis auf der x-Achse abrollt. Veranschauliche den Verlauf dieser Kurve grafisch.

32. Berechne jeweils die Länge der Kurve:

a) Logarithmusfunktion $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$ (Substitution $x = \sinh t$) ,
b) Archimedische Spirale $x = \varphi \cos \varphi$, $y = \varphi \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.