Vorlesung Mathematik für Physiker
Analysis 2
Wintersemester 2018/2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (7. Serie)

Abgabetermin: 06.12.2018

25. a) Beweise das *Grenzwertkriterium* für uneigentliche Integrale:
Sei f, g stetig und positiv auf $[a, \infty)$ und existiere $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Dann folgt aus der Konvergenz von $\int_a^\infty g(x)\,dx$ auch die Konvergenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$.
(Analoge Kriterien gelten auch für die anderen Fälle uneigentlicher Integrale.)
b) Benutze die Grenzwertkriterien, um die Existenz der Integrale

$$\Gamma(y) := \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1}\,dx \quad \text{für alle} \quad y > 0$$

nachzuweisen. Dieser Ausdruck heißt *(Eulersche) Gamma-Funktion* und verallgemeinert die Fakultät (s.a. Teil d)).
c) Beweise mittels partieller Integration die Funktionalgleichung: $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.
d) Zeige $\Gamma(n+1) = n!$ mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup 0$.
(*Hinweis*: $\Gamma(y)$ ist die Summe von zwei uneigentlichen Integralen.)

26. Berechne

a) $\displaystyle \lim_{y\to 1} \int_2^5 \exp(x^2(y-1)^2)\sqrt{yx-1}\,dx$, b) $\displaystyle \lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} \exp\left(-\frac{x^2}{y^2}\right) dx$,

c) $\displaystyle \frac{d}{dy} \int_1^2 \frac{\ln(y+x)}{x-4}\,dx \quad (y > 0)$, d) $\displaystyle \frac{d}{dy} \int_y^{\sin y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx \quad (y \in (0, \pi))$.

(*Hinweis*: In Teil d) Hauptsatz der Differentialrechnung und Kettenregel benutzen.)

27. Bestimme die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle \int_I xyz\,dxdydz$ mit $I = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$, b) $\displaystyle \int_I \frac{x^2 z^3}{4+y^2}\,dxdydz$ mit $I = [0,1]^3$,

c) $\displaystyle \int_I y \sinh(x+y^2)\,dxdy$ mit $I = [-1,1] \times [0,1]$, d) $\displaystyle \int_I \|x\|^2\,dx$ mit $I = [0,1]^N$.

28. a) Vertausche im Integral $\displaystyle \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy \right) dx$ die Integrationsreihenfolge und skizziere den Integrationsbereich.
b) Skizziere den Integrationsbereich

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \le x,\ 0 \le z,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 16\}$$

und schreibe $\int_B f(x,y,z)\,dxdydz$ als iteriertes Integral.
c) Berechne den Inhalt $|B|$ der Menge

$$B = \{(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 |\ 0 \le t \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le t\} . \quad (\textit{Hinweis}: \text{Satz von Cavalieri})$$