Vorlesung Mathematik für Physiker — Hans-Peter Gittel
Analysis 2 — Universität Leipzig
Wintersemester 2018/2019 — Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (6. Serie)

Abgabetermin: 29.11.2018

21. a) Zeige, dass sich das Gleichungssytem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1e^{y_1+y_2} & + & 2y_1y_2 & = & 1 \\ x_2e^{y_1-y_2} & - & \frac{y_1}{1+y_2} & = & 2x_1 \end{array}$$

in einer ε-Umgebung des Punktes $(x, y) = (1, 2, 0, 0)$ nach $y = (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = f(x)$ auflösen lässt.

b) Berechne die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) $f'(1, 2)$.

22. Seien a, b, c die Seitenlängen eines Quaders mit $a + b + c = 10$. Bestimme diese Seitenlängen so, dass das Quadervolumen maximal wird. Löse dieses Problem auf zwei verschiedenen Wegen:

a) durch Elimination der Nebenbedingung,

b) mittels Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

23. Wirkt eine von x abhängige Kraft $F = F(x)$ entlang der x-Achse von $x = a$ nach $x = b$, so ergibt sich die geleistete mechanische Arbeit W durch $W := \int_a^b F(x)\,dx$ (falls $F(x)$ Riemann-integrierbar ist).

a) Bestimme die geleistete Arbeit $W = W(h)$, um eine Rakete der Masse m von der Erdoberfläche auf die Höhe h über dem Erdmittelpunkt zu bringen. Dabei werden Reibung sowie andere Einflüsse vernachlässigt und die Gültigkeit des Newtonschen Gravitationsgesetzes vorausgesetzt:

$$F(x) = \gamma\frac{mM}{x^2}, \qquad \gamma \text{ – Gravitationskonstante, } M \text{ – Erdmasse.}$$

b) Zeige, dass das uneigentliche Integral $W_\infty := \lim_{h\to\infty} W(h)$ existiert. Dieses Integral ist interpretierbar als diejenige Arbeit (Energie), die nötig ist, um der Erdanziehung zu entfliehen. Berechne aus dem Energieerhaltungssatz $W_{kin} + W_{pot} = \text{const}$ die Startgeschwindigkeit v, welche die Rakete haben muss, um das Schwerefeld der Erde verlassen zu können. Diese Größe nennt man *kosmische Fluchtgeschwindigkeit*.

24. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$,

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx$.