Vorlesung Mathematik für Physiker
Analysis 2
Wintersemester 2018/2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (5. Serie)

Abgabetermin: 22.11.2018

17. a) Berechne $1,04^{0,98}$ näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms erster Ordnung für die Funktion $f(x,y) := x^y$ an der Stelle $p = (1,1)$. Gib eine Fehlerabschätzung an.

b) Bestimme das Taylorpolynom dritter Ordnung für die Funktion $f(x,y) := e^x \cos y$ an der Stelle $p = (0,0)$ und vergleiche dieses mit dem Produkt der gewöhnlichen Taylorpolynome dritter Ordnung für die beiden Faktoren

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) .$$

18. Bestimme alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) := \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

auf dem Quadrat $Q := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
(*Hinweis*: Auf den einzelnen Teilen des Randes ∂Q kann die Einschränkung von f mittels Methoden der Differentialrechnung für reelle Funktionen untersucht werden.)

19. a) Bei einer Messung werden an n verschiedenen Stellen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ die Werte $y_1, \ldots, y_n$ einer beobachtbaren reellen Größe y gemessen. Trägt man die Daten (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$ in der x-y-Ebene ein, so kann man versuchen, einen annähernd linearen Zusammenhang zwischen x und y darzustellen. Dazu wird die *Ausgleichgerade* (oder *Regressionsgerade*) $y = a + bx$ zu den gegebenen Messdaten verwendet. Hierbei bestimmt man die Koeffizienten a, b so, dass die Summe der Fehlerquadrate in x_k

$$F(a,b) := \sum_{k=1}^{n} (a + bx_k - y_k)^2$$

minimal wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Zeige, dass die Funktion F stets ein Minimum auf $\mathbb{R}^2$ besitzt und berechne diese Minimalstelle.

b) Bestimme die Ausgleichgerade zum Datensatz: $(-2,0),\ (0,1),\ (1,3),\ (2,5)$
und stelle diese Gerade sowie den gegebenen Datensatz grafisch dar.

(*Hinweis*: Als notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von F in Teil a) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für a, b. Zu dessen Auflösung beweise und benutze die Identität: $n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (x_j - x_k)^2$.)

20. a) Zeige, dass sich die Gleichung $x \cos(x+y) + e^{2y} - 1 = 0$ für hinreichend kleine $|x|, |y|$ nach $y = f(x)$ auflösen lässt und berechne $f'(0),\ f''(0)$.

b) Beweise, dass die Relation $x+y+z = \exp(-x-y-z)$ eine Funktion $z = f(x,y)$ definiert und berechne $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}$.