Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (4. Serie)

Abgabetermin: 15.11.2018

13. Die (nichtexakte) Differentialgleichung $P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ ist äquivalent zu

$$M(x,y)P(x,y) + M(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{falls } M \neq 0 \text{ auf } R := (a,b)\times(c,d) \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ ist.}$$

Damit nun diese neue Differentialgleichung exakt ist, muss M der Differentialgleichung

$$M(P_y - Q_x) = QM_x - PM_y$$

in R genügen. Eine solche Funktion M heißt dann *Eulerscher Multiplikator* oder *integrierender Faktor* zur Ausgangsdifferentialgleichung.

a) Leite die partielle Differentialgleichung für M her.

b) Untersuche die Differentialgleichung $xy^3 - 1 + x^2y^2y' = 0$ auf Exaktheit. Bestimme einen nur von x abhängigen Eulerschen Multiplikator für diese Differentialgleichung und anschließend ihre allgemeine Lösung.

14. a) Berechne alle möglichen Kreuzprodukte aus zwei der Vektoren $(-1,2,-4)$, $(1,1,1)$, $(0,5,0) \in \mathbb{R}^3$.

b) Leite die Formel $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin\varphi$ her, wenn v, w Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind und $\varphi \in [0,\pi]$ der Winkel zwischen v und w ist.

c) Beweise, dass $v, w \in \mathbb{R}^3$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $v \times w \neq 0$ gilt.

d) Zeige für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ durch direktes Nachrechnen die Regeln:

$$\langle u, v\times w\rangle = \det\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad \langle u, v\times w\rangle = \langle v, w\times u\rangle = \langle w, u\times v\rangle,$$

$$(u\times v)\times w = \langle u,w\rangle\, v - \langle v,w\rangle\, u, \qquad (u\times v)\times w + (v\times w)\times u + (w\times u)\times v = 0 .$$

15. a) Berechne $\operatorname{rot}(w\times x)$ und $\operatorname{div}(w\times x)$, wenn w ein fester Vektor des $\mathbb{R}^3$ und x der Ortsvektor ist.

b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Zeige für $f \in C^2(\Omega)$, $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ durch direktes Nachrechnen die Regeln:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0, \qquad \operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad} f, v\rangle + f \operatorname{div} v,$$

$$\operatorname{rot}(fv) = \operatorname{grad} f \times v + f \operatorname{rot} v, \qquad \operatorname{div}(u\times v) = \langle \operatorname{rot} u, v\rangle - \langle u, \operatorname{rot} v\rangle .$$

16. a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Ein C^2-Vektorfeld w auf Ω heißt *Vektorpotential* zu $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, falls

$$v = \operatorname{rot} w \quad \text{in } \Omega$$

ist. Zeige, dass dann notwendigerweise $\operatorname{div} v = 0$ gelten muss und dass sich zwei Vektorpotentiale zu v in einer Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset \Omega$ nur durch ein Gradientenfeld unterscheiden.

b) Untersuche, ob $w(x,y,z) = \frac{1}{3}(xz, yz, -x^2 - y^2)$ ein Vektorpotential zum Vektorfeld $v(x,y,z) = (-y, x, 0)$ ist. Bestimme gegebenenfalls zwei weitere Vektorpotentiale, welche sich nicht nur durch Konstante von w unterscheiden.