Vorlesung Mathematik für Physiker
Analysis 2
Wintersemester 2018/2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (3. Serie)

Abgabetermin: 08.11.2018

9. a) Berechne jeweils die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) sowie deren Determinante für die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(r,\varphi,\vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \ , \quad g(r,\varphi,\zeta) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \zeta) \ .$$

b) Ist $(r,\varphi,\vartheta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$, so bezeichnet man diese Parameter als *Kugelkoordinaten* des Punktes $x = f(r,\varphi,\vartheta)$.
Ist $(r,\varphi,\zeta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times (-\infty,\infty))$, so bezeichnet man diese Parameter als *Zylinderkoordinaten* des Punktes $x = g(r,\varphi,\zeta)$.
Veranschauliche beide Koordinaten grafisch.

10. a) Formuliere die *Quotientenregel* für die Ableitung reellwertiger (skalarer) Funktionen und beweise diese mittels Kettenregel.

b) Es sei $f = f(r)$ differenzierbar für $r > 0$. Bestimme den Gradienten von $h = h(x,y,z)$ mit $h(x,y,z) := f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ für $x^2+y^2+z^2 \neq 0$.

c) Berechne die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2) := e^{x_1 x_2}$ in den durch die Gerade mit der Gleichung $x_1 - 4x_2 = 2$ gegebenen Richtungen im Punkt $(-2,-1)$.

11. Welches der folgenden Vektorfelder des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist ein Potentialfeld? Bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion.

a) $v(x,y) = (3x^2y, x^3)$,
b) $v(x,y) = (2xe^y - 1, x^2e^y + \tan y) \quad (|y| < \frac{\pi}{2})$,
c) $v(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$,
d) $v(x,y,z) = (y\sinh x, z + \cosh x, xy\ln z) \quad (z > 0)$.

12. a) Teste die folgende Differentialgleichung auf Exaktheit

$$(3x^2y^2 + 2y - 1) + (2x^3y + 2x + 2y)y' = 0$$

b) Löse das Anfangswertproblem zu a) mit $y(0) = 1$.