Vorlesung Mathematik für Physiker
Analysis 2
Wintersemester 2018/2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (2. Serie)

Abgabetermin: 01.11.2018

5. Bestimme jeweils ein reelles Fundamentalsystem für die Differentialgleichungssysteme $\vec{y}\,'(x) = A\,\vec{y}(x)$ mit

$$\text{a)}\quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Die Koeffizientenmatrix A in b) ist nicht symmetrisch und besitzt nur einen Eigenwert λ. Es besteht Ungleichheit zwischen seiner algebraischen und geometrischen Vielfachheit. Zur Ermittlung eines zweiten linear unabhängigen Lösungsvektors $\tilde{y}$ ist vom Ansatz $\tilde{y}(x) = (z + x\tilde{z})e^{\lambda x}$ auszugehen. Die Berechnung der Vektoren $z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ erfolgt durch Einsetzen dieses Ansatzes in das Differentialgleichungssystem.)

6. Bestimme jeweils die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad y^{(5)} + 27y'' = 0\ ; \\ &\text{b)}\quad y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0\ ; \\ &\text{c)}\quad y''' + y'' - 4y' - 4y = 6x - 4\ . \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in c) lässt sich – alternativ zur Methode der Variation der Konstanten nach Übergang zum äquivalenten Differentialgleichungssystem erster Ordnung – durch einen Ansatz aus der gleichen Klasse von Funktionen wie die Störung finden.)

7. a) Untersuche die folgenden reellwertigen Funktionen zweier Variabler in allen Punkten $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \quad f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

b) Berechne für die Funktionen aus a) die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$, in denen es möglich ist. In welchen Punkten sind die Funktionen total differenzierbar?

c) Bestimme die Tangentialebene an die jeweilige Funktion aus a) im Punkt $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Stelle jeweils die Funktion zusammen mit dieser Tangentialebene grafisch dar.

8. a) Für ein ideales Gas mit dem Druck p, dem Volumen V und absoluten Temperatur T gilt die *Zustandsgleichung* $\dfrac{pV}{T} = \text{const}$.

$$\text{Zeige die Beziehung} \qquad \frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial V} = -1\ .$$

b) Berechne die partiellen Ableitung zweiter Ordnung von $\quad f(x_1, x_2) = \dfrac{\arctan x_1}{1 + x_2^2}$.