Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (1. Serie)

Abgabetermin: 25.10.2018

1. Transformiere das folgende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\vec{y}\,'' = \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2' y_3 - \sin y_1' + 4x^2 \\ y_3' - y_1 y_3 + y_3^4 \ln(x-2) \\ 2(y_1')^5 - e^{-xy_2} + \cosh(3x) \end{pmatrix} .$$

2. Bestimme die Massenzerfallsgesetze für eine dreigliedrige radioaktive Zerfallsreihe $S_1 \xrightarrow{\lambda_1} S_2 \xrightarrow{\lambda_2} S_3$. Wenn $m_i = m_i(t)$ die Masse der Substanz S_i zur Zeit $t \geq 0$ und $\lambda_i > 0$ die Zerfallskonstante von S_i bezeichnet, so wird der Zerfallsprozess beschrieben durch das Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda_1 m_1$$
$$\frac{dm_2}{dt} = \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 \qquad \text{(Herleitung: } m_2(t+\Delta t) = m_2(t) + \lambda_1 m_1(t)\Delta t - \lambda_2 m_2(t)\Delta t\text{)}$$
$$\frac{dm_3}{dt} = \lambda_2 m_2$$

mit den Anfangswerten $m_1(0) = M,\ m_2(0) = m_3(0) = 0$.
(*Hinweis:* Bestimme m_1, m_2, m_3 durch rekursives Lösen der Differentialgleichungen beginnend mit der ersten Zeile. Beachte auch den Fall $\lambda_1 = \lambda_2$.)

3. Beweise folgende Behauptung:
Sei $a_{jk} \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann bilden n Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ des linearen homogenen Differentialgleichungssystems

$$y_j'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k(x) \ , \ j = 1, \ldots, n$$

genau dann ein Fundamentalsystem auf I, wenn ihre *Wronski-Determinante*

$$W[\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] := \det Y \ , \ Y := (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$$

für alle Punkte $x \in I$ verschieden von 0 ist.
(*Hinweis:* Zeige: $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ linear abhängig genau dann, wenn $\det Y(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$. Betrachte dabei Lösungen der Form $\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \cdots c_n\vec{y}_n(x)$ mit geeigneten $c_l \in \mathbb{R}$.)

4. a) Zeige, dass $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -x^{-2} \\ x^{-2} \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem für das zu

$$\begin{aligned} y_1' &= \tfrac{1}{x} y_1 + \tfrac{3}{x} y_2 \\ y_2' &= \tfrac{1}{x} y_1 - \tfrac{1}{x} y_2 + 2 \end{aligned}$$

gehörende homogene Differentialgleichungssystem bilden.
b) Bestimme mittels Variation der Konstanten die allgemeine Lösung des obigen inhomogenen Differentialgleichungssystems.