

Wiederholungsaufgaben (2. Teil)

– Aufgaben zur Klausurvorbereitung –

Bemerkung: Eine Auswahl ähnlicher Aufgabentypen wird den Inhalt der Prüfungsklausur bilden. Hinzu kommen noch kleine Fragen zu grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen und Sachverhalten aus der Vorlesung. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Aufwendige Integrations-techniken werden keine entscheidende Rolle spielen. Die Klausur wird insgesamt 120 Minuten dauern.

7. a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$.

b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(1, xz, xy) \cdot n \, d\sigma$, wenn \mathcal{F} die obere Einheitskugel und n der Einheitsnormalenvektor auf \mathcal{F} mit positiver z -Koordinate ist, einmal direkt und einmal durch Anwendung des Stokesschen Integralsatzes.

c) Sei

$$\Omega := \{(x, y, z) \in U_1(0) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$$

Berechnen Sie das Integral $\int_{\Omega} (xy + yz + zx) \, dx \, dy \, dz$ einmal direkt und einmal durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes.

8. a) Testen Sie die Differentialgleichung $xy^3 - 1 + x^2y^2y' = 0$ auf Exaktheit. Bestimmen Sie einen nur von x abhängigen Eulerschen Multiplikator für diese Differentialgleichung und anschließend ihre allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie alle in \mathbb{C} holomorphen Funktionen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ mit

$$u(x, y) = 2 \cos x \sinh y + 4x, \text{ bzw. } u(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2y^2.$$

c) Sei $f(z) = \frac{e^z - 1}{(z - 2\pi i)^3}$. Berechnen Sie $\int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\sin(iz)} |z|^2 dz$ über die geradlinige Verbindungsstrecke \mathcal{C} von i nach $2i$ und die Integrale $\int_{\mathcal{K}} f(z) \, dz$ längs der im positiven Sinn durchlaufenen Kreislinien \mathcal{K} um 0 mit den Radien 2 bzw. 10 .

9. a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(z) = \frac{2z + 3i}{z^2 + 5z + 4}$ jeweils die Laurent-Entwicklung in den Ringgebieten

$$|z| < 1, \text{ bzw. } 0 < |z + 4| < 3.$$

b) Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen

$$\frac{z}{1 - \cos z}, \quad \frac{\sinh(z^2) - z^2}{(1 + 5i)z^3}, \quad \frac{1}{(z + 2)(z - i)^4}, \quad z^2 \cos\left(\frac{3i}{z - 1}\right).$$

Geben Sie jeweils das Residuum und im Falle eines Pols dessen Ordnung an.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} \, dx$.