Vorlesung Mathematik für Physiker | Hans-Peter Gittel
Analysis 2 | Universität Leipzig
Wintersemester 2018/2019 | Mathematisches Institut

Wiederholungsaufgaben (1. Teil)

– Aufgaben zur Klausurvorbereitung –

Bemerkung: *Eine Auswahl ähnlicher Aufgabentypen wird den Inhalt der Prüfungsklausur bilden. Hinzu kommen noch kleine Fragen zu grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen und Sachverhalten aus der Vorlesung. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Aufwendige Integrationstechniken werden keine entscheidende Rolle spielen. Die Klausur wird insgesamt 120 Minuten dauern.*

1. a) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung des linearen homogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= \quad -y_2 + y_3 \\ y_3' &= \quad 2y_1 - y_3 \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für das lineare inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= \ \ y_1 + \ \ y_2 - 5x + 2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 - 8x - 8 \ ; \\ y_1(0) &= 2,\ y_2(0) = 4 \ . \end{aligned}$$

2. a) Untersuchen Sie die folgende reellwertige Funktion zweier Variabler in allen Punkten $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an f im Punkt $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(2, -1)$ in die durch die Gerade mit der Gleichung $x_1 - 3x_2 = 5$ gegebenen Richtungen.

3. a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x, y) := (x^2 + 2y^2)\exp(-x^2 - y^2)$ auf dem $\mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie denjenigen Punkt auf der Fläche $z = x^2 + y^2$, der von $(1, 1, \frac{1}{2})$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat.

c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung an der Stelle $p = (0, 0, 0)$ für die Funktion $f(x, y, z) := x\cos(yx + z)$ an der Stelle $p = (0, 0, 0)$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung an, wenn in $[-1, 1]^3$ die Funktionswerte von f durch die Werte dieses Polynoms ersetzt werden.

4. a) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x^2 \cosh(xy) + 2\sqrt{1+y} - 2 = 0$ für hinreichend kleine $|x|, |y|$ nach $y = f(x)$ auflösen lässt und berechne $f'(0)$, $f''(0)$.

b) Beweisen Sie, dass die Relation $xe^{yz} + y + z^2 = 0$ in $U_\varepsilon((0,-1,1))$ eine Funktion $z = f(x,y)$ definiert, und berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)$.

c) Sei $v(x,y,z) = (x,y,z)$ der Ortsvektor und $h(x,y,z) := g(\frac{xy}{z})$ mit einer Funktion $g \in C^2(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} h$, Δh, $\operatorname{div}(vh)$, $\operatorname{rot}(vh)$ für $z \neq 0$.

5. a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sinh x}} \; .$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int_B z\, dxdydz$, wobei B die obere Halbkugel mit Radius 2 um $(0,0,0)$ ist, und

$\int_B \frac{y}{x}\, dxdy$, wobei B diejenige beschränkte Teilmenge der Ebene ist, welche von der Kurve $y = \ln x$, der x-Achse und von der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird.

6. a) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, welches von den drei Koordinatenebenen und der Ebene $z = 2 - 2x - y$ begrenzt wird, sowie das Volumen desjenigen Körpers, der vom geraden Kreiszylinder mit Radius R zentral aus der Kugel mit Radius $2R$ herausgeschnitten wird.

b) Berechnen Sie jeweils die Länge der Kurve $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}:\; y = \sqrt{x}^3 \;,\; 0 \le x \le 4; \qquad \mathcal{C}:\; x = \varphi\cos\varphi, y = \varphi\sin\varphi, z = \varphi \;,\; 0 \le \varphi \le 2\pi \; .$$

c) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale jeweils einmal direkt und einmal mittels Gaußschem Integralsatz. Dabei wird der Rand ∂B des Integrationsbereichs $B \subset \mathbb{R}^2$ als positiv orientiert vorausgesetzt.

$$\oint_{\partial B} y^2 dx + 2x dy \;,\; B = [0,1] \times [0,3]; \qquad \oint_{\partial B} (x - y^3)dx - (y^2 - x^3)dy \;,\; B = \overline{U_1((0,0))}.$$