Typeneinteilung linearer partiellen Differentialoperatoren 2. Ordnung

$$L[u] := \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{=:H[u] \text{ (Hauptteil)}} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + d(x)$$

$$Q_L(x;\xi) := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \xi^T A(x)\xi$$

(Charakteristische Form oder Hauptsymbol)

Sind $\lambda_1(x), \ldots \lambda_N(x)$ die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $A(x) := \Big(a_{ij}(x)\Big)_{i,j=1}^{N}$.
Dann heißt L in $x \in \mathbb{R}^N$

elliptisch $\Leftrightarrow$ $\lambda_i(x) > 0$ oder $\lambda_i(x) < 0$ für alle i,

parabolisch $\Leftrightarrow$ $\lambda_{i^*}(x) = 0$ für ein i^*,
$\lambda_i(x) > 0$ oder $\lambda_i(x) < 0$ für $i \neq i^*$,

hyperbolisch $\Leftrightarrow$ $\lambda_{i^*}(x) > 0$ für ein i^*,
$\lambda_i(x) < 0$ für $i \neq i^*$ (oder umgekehrt).