

Hans-Peter Gittel

Analysis 3
(für Physiker)
Wintersemester 2016/2017

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

Version vom 1. Februar 2017

Es wird keinerlei Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der hier vorliegenden Mitschrift gegeben.

Diese Mitschrift wurde ursprünglich von Felix Dietzsch mit Hilfe von $\text{\LaTeX} 2_{\mathcal{E}}$ im Wintersemester 2008/2009 gesetzt. Die jeweils aktuellste Version der Mitschrift ist erhältlich unter:

<http://www.math.uni-leipzig.de/~gittel/ma3phys16.html>

Inhaltsübersicht

1	Integralsätze	1
2	Funktionentheorie	25
3	Partielle Differentialgleichungen	49

Inhaltsverzeichnis

1	Integralsätze	1
1.1	Kurven- oder Wegintegrale	1
1.1.1	Kurvenlänge	1
1.1.1.1	Parametrisierung	1
1.1.1.2	Motivation	2
1.1.1.3	Parametertransformation	2
1.1.2	Skalares Kurvenintegral oder Kurvenintegral 1. Art	3
1.1.3	Vektorielltes Kurvenintegral oder Kurvenintegral 2. Art	4
1.1.3.1	Definition und Beispiele	4
1.1.3.2	Konservative Vektorfelder	6
1.1.3.3	Hinlänglichkeitsbedingungen der Integrierbarkeitsbedingungen	7
1.1.3.4	Zusammenfassung	9
1.2	Oberflächenintegrale	9
1.2.1	Flächen im \mathbb{R}^3	9
1.2.2	Tangentenvektoren und Flächennormale	12
1.2.3	Berechnung des Flächeninhaltes	13
1.2.4	Skalares Oberflächenintegral	15
1.2.5	Vektorielltes Oberflächenintegral	15
1.3	Integralsätze von Gauß und Stokes	16
1.3.1	Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene	16
1.3.1.1	Normalbereich bezüglich der x -Achse	16
1.3.1.2	Allgemeiner Fall	17
1.3.2	Der Integralsatz von Gauß im Raum	18
1.3.2.1	Beweis des Gaußschen Integralsatzes im Raum	18
1.3.2.2	Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes	19
1.3.3	Der Integralsatz von Stokes	20
1.3.3.1	Beweis des Stokesschen Integralsatzes	20
2	Funktionentheorie	25
2.1	Holomorphe Funktionen	25
2.1.1	Darstellung	25
2.1.2	Differentiation komplexer Funktionen	26
2.1.3	Zusammenhang zwischen komplexer Ableitung und Jacobimatrix	26
2.1.4	Die komplexe Logarithmusfunktion	29

2.1.5	Fortsetzung reeller Funktionen im Komplexen	29
2.2	Integralsatz und Integralformel von Cauchy	30
2.2.1	Komplexe Integrale	30
2.2.2	Der Cauchysche Integralsatz	32
2.2.3	Stammfunktionen	32
2.2.4	Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz	33
2.3	Hauptsätze über holomorphe Funktionen	35
2.3.1	Der Entwicklungssatz	35
2.3.2	Folgerungen aus dem Entwicklungssatz	36
2.3.2.1	Analytizität	36
2.3.2.2	Identitätssatz	38
2.3.3	Zusammenfassung	39
2.4	Residuentheorie	39
2.4.1	Laurent-Entwicklung	39
2.4.2	Klassifikation isolierter Singularitäten	41
2.4.3	Das Residuenkalkül	43
2.4.3.1	Berechnung von Residuen	43
2.4.3.2	Der Residuensatz	44
2.4.3.3	Anwendung: Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen	46

3 Partielle Differentialgleichungen 49

3.1	Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	49
3.1.1	Charakteristische Form oder Hauptsymbol	49
3.1.2	Prototypen	50
3.2	Die Laplacegleichung	51
3.2.1	Haupteigenschaften harmonischer Funktionen	51
3.2.2	Fundamentallösungen	52
3.2.3	Dirichletproblem	53
3.3	Die Wärmeleitungsgleichung	54
3.3.1	Lösung des Anfangswertproblems	54
3.3.2	Eigenschaften der Lösung des Anfangswertproblems	55
3.4	Wellengleichung	57
3.4.1	Allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung	57
3.4.2	Lösungsformel von d'Alembert	58
3.4.3	Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung	59
3.4.4	Wellengleichung in höheren Dimensionen	62

Literaturverzeichnis

- [1] Courant, R. und D. Hilbert: Die Methoden der Mathematischen Physik II. Springer 1993
- [2] Fischer, H. und H. Kaul: Mathematik für Physiker 1,2. Teubner 1990
- [3] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis II. Teubner 1990
- [4] Kerner, H. und W. von Wahl: Mathematik für Physiker. Springer 2006
- [5] Remmert, R.: Funktionentheorie 1. Springer 1992
- [6] Wladimirow, W.S.: Gleichungen der Mathematischen Physik. Dt. Verl. d. Wiss. 1972
- [7] Zeidler, E.(Hrsg.): Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner 1996

Kapitel 1

Integralsätze

1.1 Kurven- oder Wegintegrale

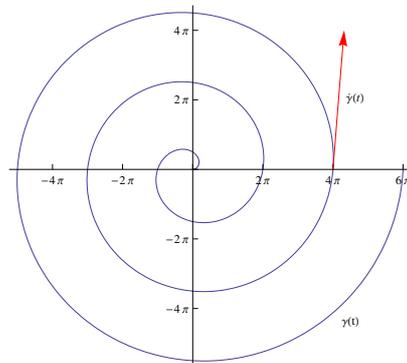
1.1.1 Kurvenlänge

1.1.1.1 Parametrisierung

Definition 1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Gebiet. Dann heißt $\mathcal{C} \subset \Omega$ *Kurve* oder *Weg*, falls es eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ gibt mit $\gamma(I) = \mathcal{C}$. Man nennt \mathcal{C} eine *C^r -Kurve*, falls $\gamma \in C^r([a, b], \mathbb{R}^N)$ ist, und *reguläre Kurve*, falls der Tangentenvektor $\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{dy_1}{dt}(t), \dots, \frac{dy_N}{dt}(t)\right) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist. γ heißt *Parametrisierung* von \mathcal{C} .

Beispiel 1.2. i. *Archimedische Spirale.*

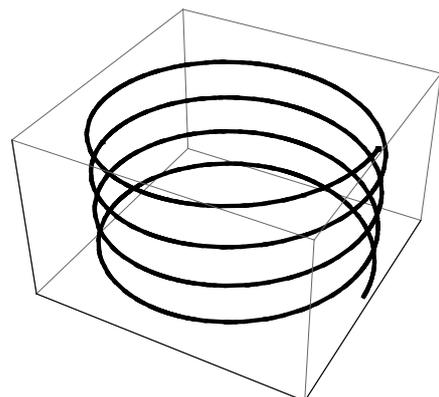
$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t \cos t, t \sin t), \quad t \in (0, \infty) \\ \dot{\gamma}(t) &= (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t) \\ &= \frac{1}{t} \gamma(t) + \gamma(t)^\perp \neq 0.\end{aligned}$$



ii. *Schraubenlinie.*

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (r \cos t, r \sin t, ht) \\ &\quad r, h > 0, \quad t \in (0, \infty) \\ \dot{\gamma}(t) &= (-r \sin t, r \cos t, h) \\ \|\dot{\gamma}(t)\| &= r^2 + h^2 > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma(t)$ ist regulär für $t \geq 0$.



1.1.1.2 Motivation

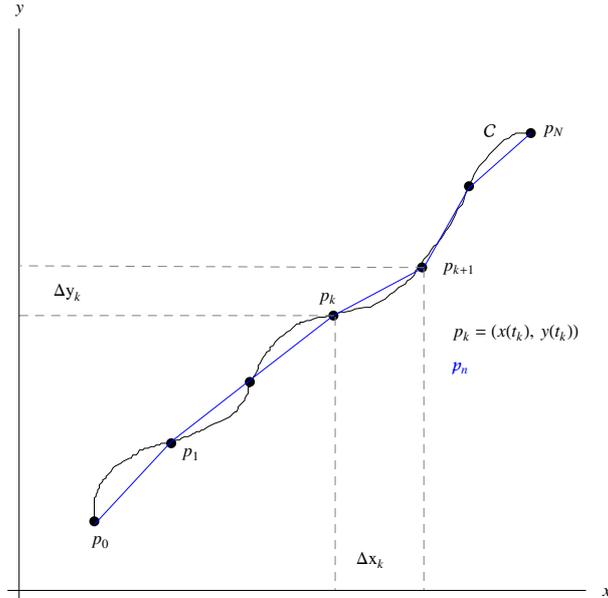
Definition 1.3. Ist $\mathcal{C} \subset \Omega$ gegeben durch $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$, so heißt $|\mathcal{C}| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ Länge der Kurve \mathcal{C} .

Sei \mathcal{C} gegeben durch die Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b], \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0, x, y \in C^1([a, b])$. Um die Länge $|\mathcal{C}|$ anzunähern, unterteilen wir $[a, b]$ durch die Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Diese Zerlegung erzeugt $p_0, \dots, p_n \in \mathcal{C}$. Werden je zwei benachbarte Punkte durch Geradenstücke verbunden, so entsteht ein Polygonzug $\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P}_n$.

Länge des Stückes $\overline{p_k, p_{k+1}}$:

$$\begin{aligned} |\overline{p_k, p_{k+1}}| &= \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \\ \Delta x_k &= x(t_{k+1}) - x(t_k) \\ \Delta y_k &= y(t_{k+1}) - y(t_k) \\ |\mathcal{P}_n| &= \sum_{k=0}^{n-1} |\overline{p_k, p_{k+1}}| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \\ \Delta x_k &= \dot{x}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + R_1(t_{k+1} - t_k) \\ \Delta y_k &= \dot{y}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + R_2(t_{k+1} - t_k) \end{aligned}$$

mit $\lim_{t_{k+1}-t_k \rightarrow 0} \frac{R_i(t_{k+1}-t_k)}{t_{k+1}-t_k} = 0$.



$$\Rightarrow |\mathcal{P}_n| \approx \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\dot{x}(t_k)^2 + \dot{y}(t_k)^2} (t_{k+1} - t_k)$$

Die rechte Seite ist eine Riemannsche Summe zu $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$, und die Annäherung ist umso genauer, je feiner die Zerlegung Z ist.

Exakt: $|\mathcal{C}| := \sup_{\mathcal{P}_n} |\mathcal{P}_n|$.

Beispiel 1.4. Länge der Schraubenlinie $\mathcal{C}: (x, y, z) = (r \cos t, r \sin t, ht), t \in [0, \alpha], \alpha > 0$.

$$|\mathcal{C}| = \int_0^\alpha \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^\alpha \sqrt{r^2 + h^2} dt = \underline{\underline{\alpha \sqrt{r^2 + h^2}}}$$

Mit Grenzübergang $h \rightarrow 0+$ ergibt sich die Länge des Kreisbogens $x = r \cos t, y = r \sin t, z = 0, t \in [0, \alpha]$ als $|\mathcal{C}| = ar$ mit $\alpha \leq 2\pi$.

Bemerkung 1.5. Ist die Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ als Graph einer Funktion $y = f(x), x \in [a, b]$ gegeben, so wählt man die Parametrisierung $\gamma : x = t, y = f(t), \dot{\gamma} = (1, f'(t))$.

$$|\mathcal{C}| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

1.1.1.3 Parametertransformation

Definition 1.6. Zwei C^r -Parametrisierungen von $\mathcal{C} : \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\gamma(I) = \tilde{\gamma}(\tilde{I}) = \mathcal{C}, I, \tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle heißen äquivalent, wenn es eine bijektive C^r -Abbildung $h : I \rightarrow \tilde{I}$ gibt, das heißt $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(h(t))$. h nennt man dann Parametertransformation von \mathcal{C} .

Beispiel 1.7. Sei \mathcal{C} gegeben durch $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$, so erhält man einfache äquivalente Parametrisierungen durch:

- i. $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$, hier $h^{-1}(t) = a + t(b - a)$, $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$.
- ii. $\hat{\gamma}(t) := \gamma(b + t(a - b))$, $t \in [0, 1]$, hier $h^{-1}(t) = b + t(a - b)$, $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$.
 $\hat{\gamma}(t)$ liefert eine Parametrisierung von $-\mathcal{C}$ (Durchlauf von \mathcal{C} im entgegengesetzten Sinn).

Satz 1.8. (*Verhalten der Länge der Kurve \mathcal{C} bei Parametertransformation*)
 $|\mathcal{C}|$ ist invariant bezüglich Parametertransformation.

Beweis. Für 2 äquivalente Parametrisierungen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$, $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathcal{C}$ gilt:

$$\gamma = \tilde{\gamma} \circ h \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}(h(t))\dot{h}(t) \quad (\text{Kettenregel}).$$

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(h(t))\|\dot{h}(t) dt = \begin{cases} \int_{h(a)}^{h(b)} \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| du & \text{für } \dot{h} > 0 \\ -\int_{h(a)}^{h(b)} \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| du & \text{für } \dot{h} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| du & \text{für } \dot{h} > 0 \\ -\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| du & \text{für } \dot{h} < 0 \end{cases}$$

(mit Substitution $u = h(t) \Rightarrow du = \dot{h}(t)dt$). \square

Jede reguläre Kurve \mathcal{C} kann bezüglich ihrer Bogenlänge parametrisiert werden.

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$, $t_0, t \in I$, $h(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$ für festes t_0 .

Dann ist $\dot{h}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$, das heißt $h : I \rightarrow h(I) =: \tilde{I}$ ist eine bijektive C^1 -Abbildung.
 $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(h^{-1}(s))$ ist eine äquivalente C^1 -Parametrisierung von \mathcal{C} ($\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow \mathcal{C}$) und

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = \|\dot{\gamma}(t)\| \left| \frac{d}{ds} h^{-1}(s) \right| = \|\dot{\gamma}(t)\| \left| \frac{1}{\dot{h}(t)} \right| = 1.$$

D.h., der Tangentenvektor ist in diesem Fall der Einheitsvektor $\Rightarrow \int_{s_0}^s \|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\| d\sigma = s - s_0$.

Somit gibt der Parameter s die Länge des Kurvenstücks auf \mathcal{C} vom festen Punkt $P_0 = \gamma(t_0)$ zum Punkt $P = \gamma(t) = \tilde{\gamma}(h(t))$ an. s heißt deshalb *Bogenlänge* von \mathcal{C} .

$$\boxed{|\mathcal{C}| = \int_{\mathcal{C}} ds} \quad \text{mit} \quad ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (\text{skalares Bogenelement}).$$

1.1.2 Skalares Kurvenintegral oder Kurvenintegral 1. Art

Definition 1.9. Sei $\mathcal{C} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, Ω ein Gebiet, $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^N | x = \gamma(t) \neq 0, t \in [a, b]\}$. Weiterhin sei $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f \circ \gamma$ stetig auf $[a, b]$. Dann heißt

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}} f(x) ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\| dt}_{=ds}}$$

skalares Kurvenintegral oder Kurvenintegral 1. Art.

Eigenschaften:

1. Invarianz gegenüber Parametertransformation (wie bei $|\mathcal{C}|$)
2. Linearität im Integranden (wie beim Riemann-Integral)
3. Additivität bezüglich der Zerlegung von $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$ mit C^1 -Kurvenstücken \mathcal{C}_i :

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}_1} f ds + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} f ds$$

Beispiel 1.10 (Gesamtmasse eines Drahtes). Ein Draht der Liniendichte $\rho(x)$ (also Masse pro Längeneinheit) sei idealisiert durch eine Kurve \mathcal{C} . Dann ist $M := \int_{\mathcal{C}} \rho(x) ds$ die Gesamtmasse des Drahtes. Definieren wir $m(t) := \int_{t_0}^t \rho(\gamma(\tau)) \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$ für $t > t_0$, $t, t_0 \in [a, b]$ für festes t_0 , so ist $m(t)$ die Masse des Kurvenstückes von $\gamma(t_0)$ bis $\gamma(t)$.

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \Rightarrow dm = \rho(\gamma(t)) ds \Rightarrow M = \int_{\mathcal{C}} dm.$$

Zum Beispiel: Masse M einer Windung der Schraubenlinie, wenn die Dichte exponentiell mit z wächst, also $\rho(x, y, z) = Ae^z$, $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = ht$, $r, h > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} M &= \int_{\mathcal{C}} \rho ds = \int_{\mathcal{C}} Ae^z ds = \int_a^b Ae^{ht} \underbrace{\sqrt{r^2(-\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2 + h^2}}_{=ds} dt \\ &= A \sqrt{r^2 + h^2} \int_0^{2\pi} e^{ht} dt = \underline{\underline{\frac{A \sqrt{r^2 + h^2}}{h} (e^{2\pi h} - 1)}} \end{aligned}$$

1.1.3 Vektorielltes Kurvenintegral oder Kurvenintegral 2. Art**1.1.3.1 Definition und Beispiele**

Definition 1.11. Sei v ein Vektorfeld auf Ω und $\mathcal{C} \subset \Omega$ eine reguläre C^1 -Kurve mit Parametrisierung γ , so heißt

$$\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{v_1(x) \cdot dx_1 + \dots + v_N(x) \cdot dx_N}_{=\langle v, dx \rangle} := \int_a^b \underbrace{v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)}_{=\langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$$

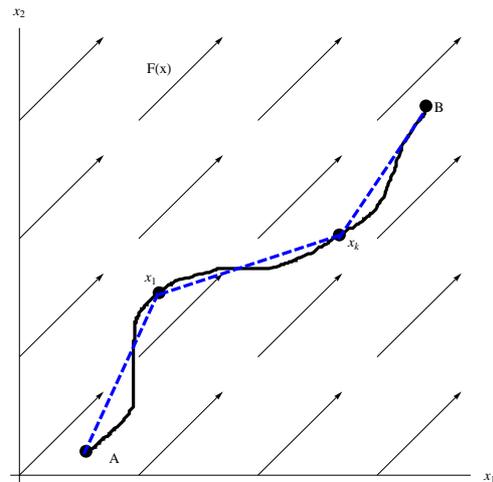
vektorielltes Kurvenintegral oder Kurvenintegral 2. Art und $dx = \dot{\gamma}(t) dt (=:\vec{ds})$ vektorielltes Bogenelement von \mathcal{C} .

Beispiel 1.12 (Arbeit im Kraftfeld).

Gesucht ist die Arbeit W , die verrichtet wird, wenn eine Punktmasse in einem Kraftfeld F entlang einer Kurve \mathcal{C} vom Anfangspunkt A zum Endpunkt B verschoben wird.

Wir betrachten einen eingeschriebenen Polygonzug mit den Eckpunkten x_0, \dots, x_n . Sei W_k die Arbeit bei der Verschiebung von x_k zu x_{k+1} .

$W_k \approx F_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$ mit $F_k = \text{konst.}$ und genügend kleinen $\|x_{k+1} - x_k\|$.



$$\text{Es ist } F_k \cdot (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) = F_k \cdot (\dot{\gamma}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + R_k)$$

mit $\lim_{t_{k+1}-t_k \rightarrow 0} \frac{R_k}{t_{k+1}-t_k} = 0$. Wähle $F_k = F(\gamma(t_k))$, so dass

$$W_k \approx F(\gamma(t_k)) \cdot \dot{\gamma}(t_k)(t_{k+1} - t_k) \Rightarrow W \approx \sum_{k=0}^{n_1} W_k \approx \sum_{k=0}^{n_1} F(\gamma(t_k)) \cdot \dot{\gamma}(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

(Zwischensumme zum Riemann-Integral $\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$). Deshalb:

$$\underline{\underline{W := \int_{\mathcal{C}} F \cdot dx .}}$$

Beispiel 1.13. Arbeit W im Gravitationsfeld $F(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$ entlang $\mathcal{C}: x = \gamma(t), t \in [a, b]$, $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$.

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} F \cdot dx = - \int_{\mathcal{C}} \frac{x}{\|x\|^3} \cdot dx = - \int_a^b \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3} \dot{\gamma}(t) dt \\ W &= - \int_a^b \frac{\gamma_1(t)\dot{\gamma}_1(t) + \gamma_2(t)\dot{\gamma}_2(t) + \gamma_3(t)\dot{\gamma}_3(t)}{(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t))^{3/2}} dt \\ &= - \int_a^b \frac{\frac{d}{dt} \frac{1}{2}(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t))}{(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t))^{3/2}} dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left((\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t))^{-1/2} \right) dt \\ &= \|\gamma(t)\|^{-1} \Big|_a^b = \frac{1}{\|\gamma(b)\|} - \frac{1}{\|\gamma(a)\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\|B\|} - \frac{1}{\|A\|}}} . \end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt hier gar nicht von der Parametrisierung γ der Kurve \mathcal{C} ab, sondern nur von deren Endpunkten A, B .

Eigenschaften:

1. Linearität im Integranden und Additivität bezüglich \mathcal{C} wie bei Kurvenintegralen 1. Art.
2. Verhalten bei Parametertransformation $\gamma = \tilde{\gamma} \circ h$ mit $h \neq 0$, $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathcal{C}$:
 - (a) $\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx$ ist invariant gegenüber *orientierungserhaltenden* Parametertransformationen, das heißt bei $\dot{h}(t) > 0$, $t \in [a, b]$.
 - (b) Ist $\dot{h}(t) < 0$, so ändert sich beim Übergang von γ zu $\tilde{\gamma}$ das Vorzeichen von $\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx$, insbesondere $\int_{-\mathcal{C}} v \cdot dx = - \int_{\mathcal{C}} v \cdot dx$.

Beweis.

$$\int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b v(\underbrace{\tilde{\gamma}(h(t))}_{=u}) \cdot \underbrace{\dot{\tilde{\gamma}}(h(t))}_{=u} \underbrace{\dot{h}(t) dt}_{=du} = \int_{h(a)}^{h(b)} v(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(u) du$$

$$\text{Für } \dot{h} > 0 \text{ ist } h(a) = \tilde{a}, h(b) = \tilde{b} \Rightarrow \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} v(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(u) du.$$

$$\text{Für } \dot{h} < 0 \text{ ist } h(a) = \tilde{b}, h(b) = \tilde{a} \Rightarrow \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} v(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(u) du. \quad \square$$

1.1.3.2 Konservative Vektorfelder

Definition 1.14. Das Vektorfeld v auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *konservativ* in Ω , wenn $\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx$ *wegunabhängig* ist für jede reguläre C^1 -Kurve $\mathcal{C} \subset \Omega$, das heißt wenn $\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx$ nur von den Endpunkten von \mathcal{C} abhängt und nicht von deren Verlauf (bei Orientierungserhaltung).

Folgerung 1.15. Das Vektorfeld v ist konservativ in Ω genau dann, wenn $\oint_{\mathcal{C}} v \cdot dx = 0$ für jede geschlossene stückweise reguläre C^1 -Kurve $\mathcal{C} \subset \Omega$, denn $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ mit $\mathcal{C}_2 = -\mathcal{C}_3$ und gleichen Anfangs- und Endpunkt von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_3 .

$$\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx = \int_{\mathcal{C}_1} v \cdot dx + \int_{\mathcal{C}_2} v \cdot dx = \int_{\mathcal{C}_1} v \cdot dx - \int_{\mathcal{C}_3} v \cdot dx$$

Satz 1.16. Vektorfeld v ist konservativ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ genau dann, wenn v ein Potentialfeld in Ω ist.

Beweis. (i). (\Leftarrow) Sei $v = \nabla f$ in Ω mit $f \in C^1(\Omega)$. Dann gilt für jede C^1 -Kurve $\mathcal{C} \subseteq \Omega$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} v \cdot dx &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt \\ &= f(\gamma(t)) \Big|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

Ergebnis: $\int_{\mathcal{C}} v \cdot dx$ hängt nur von den Endpunkten A und B von \mathcal{C} ab. Wegen der Additivität des Kurvenintegrals bezüglich \mathcal{C} gilt dies auch für alle stückweisen C^1 -Kurven.

(ii). (\Rightarrow) Sei v konservativ in Ω . Wir wählen einen festen Anfangspunkt $A \in \Omega$ und betrachten eine C^1 -Kurve $\mathcal{C}_x \subset \Omega$ von A nach $x \in \Omega$. Durch $\int_{\mathcal{C}_x} v \cdot dx$ wird eine Funktion f definiert, welche wegen Konservativität von v nur von x abhängt, das heißt

$$f(x) := \int_{\mathcal{C}_x} v \cdot dx = \int_A^x v \cdot dx.$$

Zu zeigen: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion zum Vektorfeld v in Ω , das heißt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = v_i(p)$ für $i = 1, \dots, N$, $p \in \Omega$. Nach Definition von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ betrachten wir $U_r(p) \subset \Omega$, $r > 0$. Dann ist $p + he_i \in U_r(p)$ für $|h| < r$.

$$\begin{aligned} f(p + he_i) - f(p) &= \int_A^{p+he_i} v \cdot dx - \int_A^p v \cdot dx = \int_p^{p+he_i} v \cdot dx = \int_C v \cdot dx \\ &= \int_0^h \langle v(p + te_i), e_i \rangle dt = \int_0^h v_i(p + te_i) dt, \end{aligned}$$

wenn als C die geradlinige Verbindung zwischen p und $p + he_i$ gewählt wird, d.h. $C : x = p + te_i$, $t \in [0, h]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existiert

$$\frac{d}{dh}(f(p + he_i) - f(p)) = v_i(p + he_i) \Rightarrow \nabla f(p + he_i)e_i = v_i(p + he_i) \xrightarrow{h=0} f_{x_i}(p) = v_i(p). \quad \square$$

Bemerkung 1.17. Dieser Satz ist das Gegenstück zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er lautet als Formel:

$$f(B) - f(A) = \int_C v \cdot dx \Leftrightarrow v = \text{grad } f$$

1.1.3.3 Hinlänglichkeit der Integrabilitätsbedingungen

Frage: Wann folgt aus der Gültigkeit der Integrabilitätsbedingungen

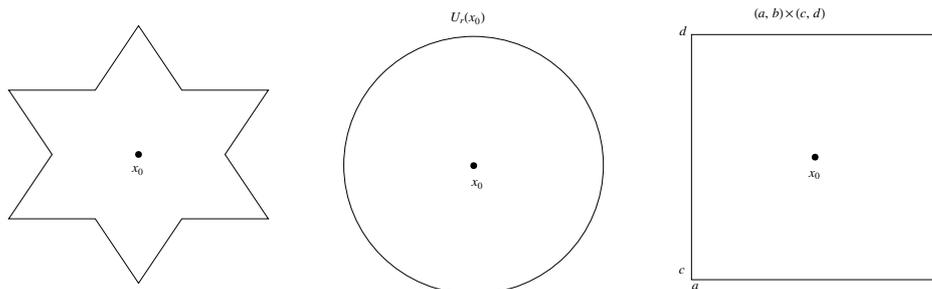
$$\boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \quad \text{in } \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

dass v ein Potentialfeld auf ganz Ω ist?

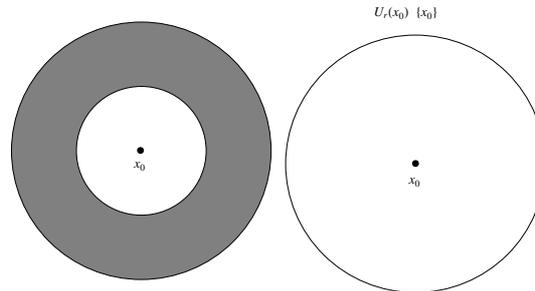
Das Beispiel eines Magnetfeldes um einen Draht (vgl. Übungsaufgabe 32) zeigt, dass die Integrabilitätsbedingungen für *beliebige Gebiete* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *nicht hinreichend* sind. Deshalb müssen Zusatzvoraussetzungen an Ω gestellt werden, hier: Sternförmigkeit.

Definition 1.18. Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *sternförmig*, wenn es ein Zentrum $x_0 \in \Omega$ gibt, so dass für jedes $x \in \Omega$ die Verbindungsgerade $\mathcal{G}_x := \{x_0 + t(x - x_0) | t \in [0, 1]\}$ vollständig in Ω verläuft.

Beispiel 1.19. i. Beispiele für sternförmige Gebiete:



ii. Beispiele für nichtsternförmige Gebiete:



Satz 1.20. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ein sternförmiges Gebiet und sind in Ω die Integrabilitätsbedingungen (1.1) für das C^1 -Vektorfeld v erfüllt, so besitzt v ein Potential auf ganz Ω .

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$ das Zentrum von Ω . Wir definieren

$$f(x) := \int_{\mathcal{G}_x} v \cdot dx = \int_0^1 \langle v(tx), x \rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^N v_i(tx_i) x_i dt.$$

Nach Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i(tx)x_i)}_{=t \frac{\partial v_i(tx)}{\partial x_k} x_i + v_i(tx) \delta_{ik}} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(tx) t x_i dt + \int_0^1 v_k(tx) dt$$

Nebenrechnung:
$$\int_0^1 v_k(tx) dt = t v_k(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 t \frac{d}{dt} v_k(tx) dt = v_k(x) - \int_0^1 t \sum_{i=1}^N \frac{v_k}{x_i}(tx) x_i dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = v_k(x) + \int_0^1 \sum_{i=1}^N \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(tx) - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(tx) \right)}_{=0 \text{ (wegen (1.1))}} t x_i dt. \quad \square$$

Bemerkung 1.21. 1. Die Hinlänglichkeit der Integrabilitätsbedingungen für ein Potentialfeld gilt auch für Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, welche sich durch eine bijektive C^2 -Abbildung auf ein sternförmiges Gebiet $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ abbilden, insbesondere für solche Gebiete, welche keine Löcher umschließen (einfach zusammenhängende Gebiete).

Beispiel: Das 'Schlitzgebiet' $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < r\} \setminus \{(x, 0) \mid 0 < x_1 < r\}$ ist einfach zusammenhängend.

2. Da sich Potentiale nur durch eine Konstante unterscheiden, stimmt das globale Potential mit dem jeweiligen lokalen Potential zu v überein (durch Integration längs der Koordinatenrichtungen).
3. Die Sternförmigkeit von Ω ist nicht notwendig für die Existenz eines Potentials zu v . Zum Beispiel besitzt das Gravitationsfeld $-\frac{x}{\|x\|^3}$ im nichtsternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Potential.

1.1.3.4 Zusammenfassung

Wann ist ein Vektorfeld $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein Potentialfeld?

$$\begin{array}{lcl}
 v \text{ konservativ} & \stackrel{\text{(Def.)}}{\iff} & \int_C v \cdot dx \text{ wegunabhängig} \\
 & & \Downarrow \\
 & & \oint_C v \cdot dx = 0 \\
 & & \Downarrow \\
 v \text{ Potentialfeld} & \stackrel{\text{(Def.)}}{\iff} & v = \text{grad } f \\
 & & \Downarrow \\
 \sum_{i=1}^N v_i dx_i \text{ exakt} & \stackrel{\text{(Def.)}}{\iff} & \sum_{i=1}^N v_i dx_i = df \\
 & & \Downarrow (\Uparrow \Omega \text{ sternförmig}) \\
 & & \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \text{ für } i, j = 1, \dots, N
 \end{array}$$

1.2 Oberflächenintegrale

1.2.1 Flächen im \mathbb{R}^3

Definition 1.22. 1. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und

$$\begin{array}{l}
 \Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \Downarrow \\
 (u, v) \mapsto (x_1, x_2, x_3) =: \mathbf{x}
 \end{array}$$

eine injektive Abbildung mit $\Phi \in C^r(G, \mathbb{R}^3)$, $r \geq 1$, deren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \quad (1.3)$$

linear unabhängig für jedes $(u, v) \in G$ sind. Dies ist dann der Fall, wenn $\text{rg } \Phi' = 2$. Φ heißt dann *Flächenparametrisierung* $\mathcal{F} = \Phi(G)$ und G der *Parameterbereich* von \mathcal{F} .

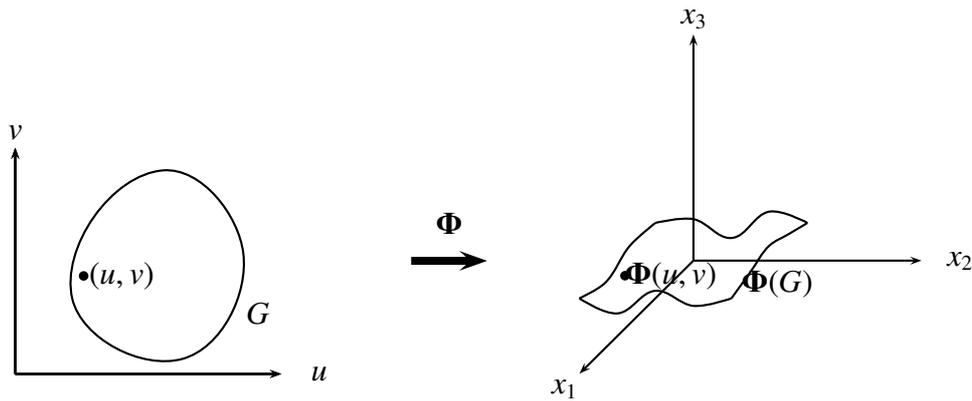


Abb. 1.1: Flächenparametrisierung

2. $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ heißt C^r -Fläche, falls eine Flächenparametrisierung Φ mit $\mathcal{F} = \Phi(G)$ existiert und zusätzlich die inverse Abbildung Φ^{-1} stetig ist. Eine solche Parametrisierung von \mathcal{F} heißt dann *zulässige Parametrisierung* von \mathcal{F} .

Beispiel 1.23. (a) Eine Ebene \mathcal{E} wird aufgespannt durch $\mathbf{x} = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ mit gegebenen Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, u, v \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{a}\} + \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$$

Hier ist $G = \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \mathbf{b}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \mathbf{c}$. Φ ist also eine C^r -Flächenparametrisierung, falls \mathbf{b} und \mathbf{c} linear unabhängig sind.

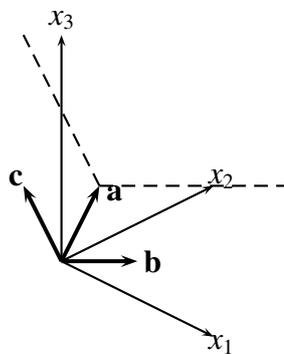


Abb. 1.2: Ebene

- (b) Die obere Sphäre \mathcal{O} der Einheitskugel $\mathbf{S}^2 = U_1(0) \in \mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch

$$\mathcal{O} : x_3 = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}, \quad (x_1, x_2) \in \underbrace{U_1(0)}_{=G \subset \mathbb{R}^2}$$

Hier ist $u = x_1, v = x_2$.

Allgemein beschreibt $x_3 = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in G$ eine C^r -Fläche im \mathbb{R}^3 , falls $f \in C^r(G)$ (Graph der Funktion f). Diese Fläche lässt sich parametrisieren durch

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, f_u)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 1, f_v)$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ sind linear unabhängig. Ein solches Φ ist auch stets eine zulässige Flächenparametrisierung $\mathcal{F} = \Phi(G)$.

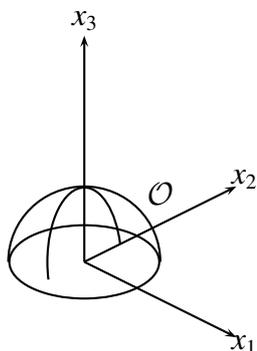


Abb. 1.3: Obere Kugelsphäre

(c) Die Schraubenfläche \mathcal{F} wird parametrisiert durch

$$x_1 = r \cos t \quad x_2 = r \sin t \quad x_3 = \frac{1}{\pi} t$$

mit $r \in (1, 2)$, $t \in (0, 2\pi)$ in $G = (1, 2) \times (0, 2\pi)$. Dementsprechend ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\cos t, \sin t, 0) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(-r \sin t, r \cos t, \frac{1}{\pi} \right)$$

Die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : \mathcal{F} \rightarrow (1, 2) \times (0, 2\pi)$ ist gegeben durch

$$t = \pi x_3 \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Φ ist somit eine zulässige C^∞ -Parametrisierung von \mathcal{F} .

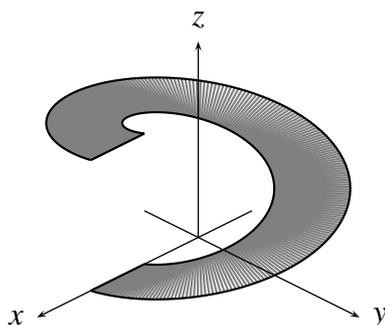


Abb. 1.4: Schraubenfläche

Bemerkung 1.24. Um Figuren mit *approximativer Selbstdurchdringung* auszuschließen, muss zusätzlich die Stetigkeit der Umkehrabbildung Φ^{-1} gefordert werden. Ähnlich wie bei Kurven gilt dann der Satz über Parametertransformationen:

Satz 1.25 (Satz über Parametertransformation). Seien $\Phi : G \rightarrow \mathcal{F}$, $\tilde{\Phi} : \tilde{G} \rightarrow \mathcal{F}$ zwei zulässige C^r -Parametrisierungen von \mathcal{F} , so existiert eine bijektive C^r -Abbildung h von G auf \tilde{G} mit $\Phi = \tilde{\Phi} \circ h$ (Umparametrisierung).

1.2.2 Tangentenvektoren und Flächennormale

Wir betrachten für eine feste Stelle $P = (u, v) \in G$

$$s \mapsto \Phi(u + s, v) \quad (1.4)$$

$$t \mapsto \Phi(u, v + t) \quad (1.5)$$

Dies sind C^1 -Kurven durch $\Phi(P)$ auf $\mathcal{F} = \Phi(G)$ und heißen *Koordinatenlinien*. Ihre Tangentialvektoren in $\Phi(P)$ sind

$$\left. \frac{d}{ds}(\Phi(u + s, v)) \right|_{s=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{d}{dt}(\Phi(u, v + t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \quad (1.7)$$

und heißen *Tangentenvektoren* an \mathcal{F} in $\Phi(P)$. Da sie linear unabhängig sind, spannen sie die Tangentialebene an \mathcal{F} in $\Phi(P)$ auf.

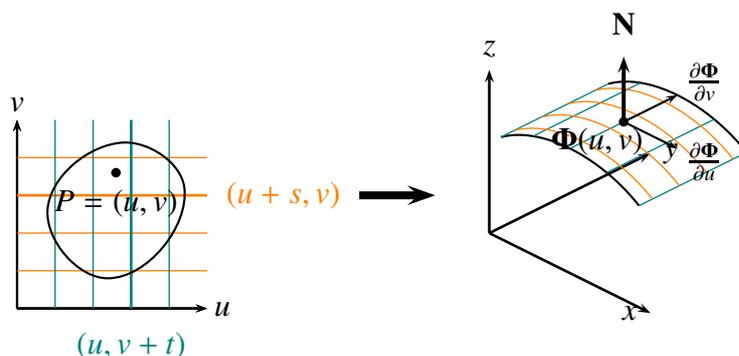


Abb. 1.5: Koordinatenlinien und Tangentialvektoren

Wir bilden das Kreuzprodukt

$$\mathbf{N}(u, v) := \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad (1.8)$$

Dieser Vektor bezeichnet die *Normale* an \mathcal{F} in $\Phi(u, v)$. Es ist $\mathbf{N} \perp \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\mathbf{N} \perp \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{D(\Phi_2, \Phi_3)}{D(u, v)} \mathbf{e}_1 + \frac{D(\Phi_3, \Phi_1)}{D(u, v)} \mathbf{e}_2 + \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u, v)} \mathbf{e}_3 \\ &\quad \text{(Funktionaldeterminanten)} \end{aligned}$$

Beispiel 1.26 (Normalenvektor auf der Schraubenfläche). Die Schraubenfläche ist parametrisiert mit

$$\Phi(r, t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ t/\pi \end{pmatrix}$$

mit $1 < r < 2, 0 < t < 2\pi$. Die Tangentenvektoren sind

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

An der Stelle $r = 3/2, t = \pi$ ist

$$\Phi(3/2, \pi) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(3/2, \pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(3/2, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -r \sin t & r \cos t & 1/\pi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\pi \sin t \\ -1/\pi \cos t \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{N}(3/2, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\pi \\ \underline{\underline{3/2}} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Berechnung des Flächeninhaltes

Aus der analytischen Geometrie erhält man den Flächeninhalt eines von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms \mathcal{P} mit

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (1.9)$$

Analog ergibt sich

$$\underbrace{\left\| s \frac{\partial \Phi}{\partial u}(P) \times t \frac{\partial \Phi}{\partial v}(P) \right\|}_{=st\|\mathbf{N}(P)\|} = st \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(P) \right\| \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v}(P) \right\| \sin \angle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(P), \frac{\partial \Phi}{\partial v}(P) \right) \quad (1.10)$$

für $r, t > 0$. Dies ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $s \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $t \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ aufgespannt wird und in der Tangentialebene an \mathcal{F} in $\Phi(P)$ liegt.

Überdeckt man \mathcal{F} durch geeignet kleine solcher Parallelogramme, so ergibt sich die Summe der Flächeninhalte dieser Parallelogramme als Näherung für den Flächeninhalt $|\mathcal{F}|$ der Fläche \mathcal{F} .

Definition 1.27 (Flächeninhalt $|\mathcal{F}|$ einer Fläche \mathcal{F}). Der Flächeninhalt einer Fläche \mathcal{F} ist gegeben durch

$$|\mathcal{F}| := \int_G \|\mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv$$

$$= \int_G \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv = \int_G \sqrt{\left(\frac{D(\Phi_2, \Phi_3)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\Phi_3, \Phi_1)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u, v)} \right)^2} \, du \, dv$$

Damit $|\mathcal{F}|$ einen geometrischen Sinn hat, muss noch gezeigt werden:

Satz 1.28. Der Wert des Integrals $\int_G \|\mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv$ ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung Φ .

Beweis. Seien $\Phi : G \rightarrow \mathcal{F}$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{G} \rightarrow \mathcal{F}$ zwei zulässige Parametrisierungen von \mathcal{F} . Dann existiert eine bijektive C^1 -Parametertransformation $\mathbf{h} : G \rightarrow \tilde{G}$ mit $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \mathbf{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} &= \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial \tilde{u}}(\mathbf{h}(u, v)) \frac{\partial h_1}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial \tilde{v}}(\mathbf{h}(u, v)) \frac{\partial h_2}{\partial v}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{v}} \right) \left(\frac{\partial h_1}{\partial u} \frac{\partial h_2}{\partial v} - \frac{\partial h_2}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial v} \right) \\ &\Rightarrow \mathbf{N}(u, v) = \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \det \mathbf{h}'(u, v) \quad \text{mit } (\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{h}(u, v) \\ \Rightarrow \int_G \|\mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv &= \int_G \|\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{h}(u, v))\| |\det \mathbf{h}'(u, v)| \, du \, dv \\ &\quad (\text{Subst.: } (\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{h}(u, v) \Leftrightarrow (u, v) = \mathbf{h}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v})) \\ &= \int_{\mathbf{h}(G)} \|\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{u}, \tilde{v})\| |\det \mathbf{h}'| \underbrace{\left| \frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} \right|}_{=|\det(\mathbf{h}^{-1})'(u, v)| = \frac{1}{\det \mathbf{h}'}} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \int_{\tilde{G}} \|\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{u}, \tilde{v})\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 1.29 (Flächeninhalt einer Windung der Schraubenfläche \mathcal{F}).

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &= \int_{(1,2) \times (0,2\pi)} \|\mathbf{N}(r, t)\| \, dr \, dt \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{(1/\pi)^2 + r^2} \, dt \right) dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left(r \sqrt{r^2 + (1/\pi)^2} + (1/\pi^2) \operatorname{arsinh}(r\pi) \right) \Big|_1^2 \\ &= 2 \sqrt{1 + 4\pi^2} - \sqrt{1 + \pi^2} + (1/\pi)(\operatorname{arsinh}(2\pi) - \operatorname{arsinh}(\pi)) \\ &\approx \underline{\underline{9.642}} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.30. 1. Da sich das Integral für \mathcal{F} nicht ändert, wenn im Integrationsbereich G eine zweidimensionale Nullmenge heraus- oder dazugenommen wird, ist

$$|\mathcal{F}| = \int_G \|\mathbf{N}\| \, du \, dv = \int_{\tilde{G}} \|\mathbf{N}\| \, du \, dv = |\tilde{\mathcal{F}}|,$$

falls $|\partial G| = 0$ und $\Phi : \partial G \rightarrow \partial \mathcal{F}$.

2.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\|^2 &= \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 \left(1 - \cos^2 \angle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \right) \\ &= \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle^2 \\ &= \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \end{vmatrix} = \det \mathbf{g} \end{aligned}$$

\mathbf{g} bezeichnet die GRAMSche¹ Matrix von \mathcal{F} . Man kann somit auch schreiben

$$|\mathcal{F}| = \int_G \sqrt{\det \mathbf{g}} \, du \, dv$$

In der Physik benutzt man das *skalare Oberflächenelement*

$$do := \sqrt{\det \mathbf{g}} \, du \, dv = \|\mathbf{N}\| \, du \, dv$$

1.2.4 Skalares Oberflächenintegral

In Verallgemeinerung von $|\mathcal{F}| = \int_{\mathcal{F}} do$ definiert man das *skalare Oberflächenintegral* oder *Oberflächenintegral 1. Art*:

Definition 1.31. Sei \mathcal{F} eine C^1 -Fläche mit zulässiger Parametrisierung $\Phi : G \rightarrow \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ und f eine reellwertige Funktion auf \mathcal{F} . Das skalare Oberflächenintegral ist dann definiert durch

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} f \, do := \int_G f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv} \quad (1.11)$$

Das Integral ist wieder invariant gegenüber Parametertransformationen.

Beispiel 1.32. Gesucht ist die Masse m einer Windung der Schraubenfläche \mathcal{F} , wenn diese mit einer Flächendichte $\rho(\mathbf{x})$ proportional zur Höhe x_3 belegt ist, das heißt $\rho(\mathbf{x}) = \alpha x_3$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$, $\alpha = \text{const.}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : x_1 &= r \cos t, x_2 = r \sin t, x_3 = t/\pi, \quad r \in (1, 2), t \in (0, 2\pi) \\ \mathbf{N}(r, t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (1/\pi \sin t, -1/\pi \cos t, r) \\ m &:= \int_{\mathcal{F}} \rho(\mathbf{x}) \, do = \int_{(1,2) \times (0,2\pi)} \alpha \Phi_3(r, t) \|\mathbf{N}(r, t)\| \, dr \, dt \\ &= \alpha \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + r^2} \, dt \right) \, dr \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} t \, dt \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + r^2} \, dr \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} (2\pi)^2 \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + r^2} \, dr = 2\alpha\pi \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + r^2} \, dr = \underline{\underline{\alpha |\mathcal{F}|}} \end{aligned}$$

1.2.5 Vektorielltes Oberflächenintegral

Definition 1.33. Unter gleichbleibenden Voraussetzungen an die Parametrisierung von Φ wird für ein stetiges Vektorfeld \mathbf{v} auf \mathcal{F} mit dem *Einheitsnormalenvektor* $\mathbf{n}(u, v) := \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|}$ durch

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, do = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot \vec{do} := \int_G \mathbf{v}(\Phi(u, v)) \mathbf{N}(u, v) \, du \, dv = \int_G \left\langle \mathbf{v} \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \, du \, dv} \quad (1.12)$$

das *vektorielle Oberflächenintegral* oder *Oberflächenintegral 2. Art* definiert. $\vec{do} := \mathbf{n} \, do$ heißt auch *vektorielles Oberflächenelement* von \mathcal{F} .

¹JØRGEN PEDERSEN GRAM (1850-1916), dänischer Mathematiker

Das vektorielle Oberflächenintegral verhält sich bei Parametertransformation anders als das skalare Oberflächenintegral. Seien $\Phi : G \rightarrow \mathcal{F}$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{G} \rightarrow \mathcal{F}$ zwei zulässige C^1 -Parametrisierungen von \mathcal{F} . Dann existiert eine bijektive C^1 -Abbildung $\mathbf{h} : G \rightarrow \tilde{G}$ mit $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \mathbf{h}$, wenn $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{h}(u, v)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u, v) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{v}} \right)}_{=\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{u}, \tilde{v})} \det \mathbf{h}', & \mathbf{h}' &= \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \\ \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_G \mathbf{v}(\Phi(u, v)) \mathbf{N}(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_{\mathbf{h}(G)} \mathbf{v}(\tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \det \mathbf{h}' \left| \frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_{\tilde{G}} \mathbf{v}(\tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\det \mathbf{h}'}{|\det \mathbf{h}'|} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \end{aligned}$$

Das vektorielle Oberflächenintegral ist *invariant* unter *positiver Parametertransformation* mit $\det \mathbf{h}' > 0$ und ändert sein Vorzeichen unter *negativer Parametertransformation* $\det \mathbf{h}' < 0$. Bei Vorgabe einer zulässigen Parametrisierung wird auch stets eine *Orientierung* der Fläche \mathcal{F} ausgezeichnet mit den zwei Klassen *positive Orientierung* und *negative Orientierung*.

Beispiel 1.34. Wir berechnen $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ für eine Windung der Schraubenfläche \mathcal{F} und $\mathbf{v} = (x_2, -x_1, 0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(r, t) &= (1/\pi \sin t, -1/\pi \cos t, r) \\ \Phi(r, t) &= (r \cos t, r \sin t, t/\pi) \\ \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_{(1,2) \times (0,2\pi)} (\Phi_2(r, t), -\Phi_1(r, t), 0) \cdot (1/\pi \sin t, -1/\pi \cos t, r) \, du \, dv \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} r/\pi \sin^2 t + r/\pi \cos^2 t \, dt \right) \, dr \\ &= 1/\pi \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} r \, dt \right) \, dr = 1/\pi \int_1^2 2\pi r \, dr = r^2 \Big|_1^2 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

1.3 Integralsätze von Gauß und Stokes

1.3.1 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

1.3.1.1 Normalbereich bezüglich der x -Achse

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im \mathbb{R}^1 lautet

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

Das heißt, die Integration über f' kann ausgedrückt werden durch Randwerte von f .

Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^2 :

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Normalbereich bezüglich der x -Achse. Der Rand ∂B von B sei *positiv orientiert*, das heißt, beim Durchlaufen von ∂B liegt B zur Linken. $\partial B = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(t, g_1(t)) | t \in [a, b]\}, & \mathcal{C}_2 &= \{(b, t) | t \in [g_1(b), g_2(b)]\}, \\ -\mathcal{C}_3 &= \{(t, g_2(t)) | t \in [a, b]\}, & -\mathcal{C}_4 &= \{(a, t) | t \in [g_1(a), g_2(a)]\}. \end{aligned}$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\Omega \supset B$ und $P \in C(\Omega)$ mit $P_y = \frac{\partial P}{\partial y} \in C(\Omega)$, dann ist

$$\int_B \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))) dx$$

Wir betrachten das Vektorfeld $v = (P, 0)$ und berechnen

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} v \cdot (dx, dy) &= \int_{\partial B} P dx = \sum_{l=1}^4 \int_{C_l} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(t, g_1(t)) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=1} dt + \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} P(b, t) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=0} dt - \int_a^b P(t, g_2(t)) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=1} dt \\ &\quad - \int_{g_1(a)}^{g_2(a)} P(a, t) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=0} dt \\ \Rightarrow \oint_{\partial B} P dx &= \int_a^b (P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))) dt, \text{ also } \int_B \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\partial B} P dx. \end{aligned}$$

1.3.1.2 Allgemeiner Fall

Ist B ein Normalbereich bezüglich der y -Achse mit positiv orientiertem Rand ∂B und $Q, Q_x \in C(\Omega)$, so folgt analog

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial B} Q dy.$$

Satz 1.35. (*Gaußscher Integralsatz in der Ebene*, C.F.Gauß (1777 - 1855))

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich beider Achsen und $\Omega \supset B$ ein Gebiet sowie $P, Q \in C^1(\Omega)$. Dann gilt bei positiver Orientierung von ∂B :

$$\boxed{\int_B \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \oint_{\partial B} Q dy - P dx = \oint_{\partial B} (-P, Q) \cdot (dx, dy)}$$

Anwendung: Speziell ergibt sich für $|B|$ die Formel

$$|B| = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx,$$

denn setzt man in der Formel aus Satz 1.35 $P = y, Q = x$, so ist

$$\int_B \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}_{=2} dx dy = 2 \int_B dx dy = \underline{\underline{2|B|}}.$$

Beispiel 1.36. Sei $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} \underbrace{x^2 \arctan(xy)}_{=-P} dx + \underbrace{\sin y}_{=Q} dy &= \int_B \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy \\ &= - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x^3}{1+x^2 y^2} dy \right)}_{=: \varphi(x)} dx = - \int_0^{\sqrt{2}} \varphi(x) dx - \int_{-\sqrt{2}}^0 \varphi(x) dx = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist $\int_{-\sqrt{2}}^0 \varphi(x) dx = - \int_0^{\sqrt{2}} \varphi(x) dx$.

1.3.2 Der Integralsatz von Gauß im Raum

Satz 1.37 (GAUSSSCHER^{II} Integralsatz im Raum, Divergenzatz).

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma} \quad (1.13)$$

\mathbf{n} ist die *äußere Einheitsnormale* auf $\partial\Omega$, das heißt derjenige Einheitsnormalenvektor, der von $\partial\Omega$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ weist.

1.3.2.1 Beweis des Gaußschen Integralsatzes im Raum

Der Beweis erfolgt schrittweise für spezielle Bereiche $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und spezielle C^1 -Vektorfelder \mathbf{v} .

Definition 1.38. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Normalbereich* bezüglich der x_1 - x_2 -Ebene, falls

1.

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq f_2(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in B \right\} \\ \mathcal{F}_j &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = f_j(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in B \right\}, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

\mathcal{F}_1 bezeichnet den unteren Deckel, \mathcal{F}_2 den oberen Deckel.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq f_2(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \partial B \right\} \text{ (Mantel von } \Omega) \\ \partial\Omega &= \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{M} \end{aligned}$$

2. Sei $\bar{B} \subset G$, $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und habe B einen stückweisen C^1 -Rand ∂B . Weiterhin sei B ein gemeinsamer Parameterbereich für \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 . $f_j \in C^1(G)$ erzeugt eine zulässige C^1 -Parametrisierung von \mathcal{F}_j über B mit dem Normalenvektor $\mathbf{N} = \mathbf{N}(x_1, x_2) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} \times \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} = \left(-\frac{\partial f_j}{\partial x_2}, -\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, 1 \right)$.

Sei jetzt $\mathbf{v} = (0, 0, R) = R(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3$, $R \in C^1(\tilde{\Omega})$, $\tilde{\Omega}$ offen und $\tilde{\Omega} \supset \Omega$. Dann gilt

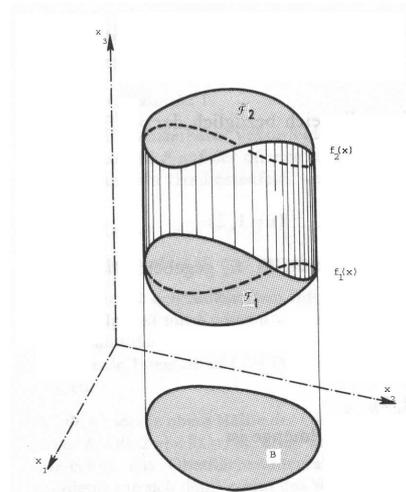
$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial x_3} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{F}_2} \frac{R}{\|\mathbf{N}\|} \, d\sigma - \int_{\mathcal{F}_1} \frac{R}{\|\mathbf{N}\|} \, d\sigma \quad (1.14)$$

Dies ist der GAUSSSCHE Integralsatz 1.37 in seiner einfachsten Form. Beweis von (1.14): Nach Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial x_3} \, d\mathbf{x} &= \int_B \left(\int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} \frac{\partial R}{\partial x_3} \, dx_3 \right) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= R(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)) - R(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Zu beachten: $d\sigma = \|\mathbf{N}\| \, dx_1 \, dx_2$.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial x_3} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{F}_2} \frac{R}{\|\mathbf{N}\|} \, d\sigma - \int_{\mathcal{F}_1} \frac{R}{\|\mathbf{N}\|} \, d\sigma$$



^{II}CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Abb. 1.6. Normalbereich

Umschreiben von (1.14): Sei jetzt $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x_1, x_2)$ der *äußere Einheitsnormalenvektor* auf $\partial\Omega = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{M}$. Es ist dann:

$$\text{auf } \mathcal{F}_2 : \quad \mathbf{n} := \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}, -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f_2)^2}} \quad \Rightarrow n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|}$$

$$\text{auf } \mathcal{F}_1 : \quad \mathbf{n} := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, -1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f_1)^2}} \quad \Rightarrow n_3 = -\frac{1}{\|\mathbf{N}\|}$$

$$\text{auf } \mathcal{M} : \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{e}_3, \text{ weil } \mathcal{M} \perp x_1\text{-}x_2\text{-Ebene} \Rightarrow n_3 = 0$$

(1.14) gilt somit genau dann, wenn

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial x_3} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{F}_2} R \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\mathcal{F}_1} R \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\mathcal{M}} R \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} R \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Analoge Formeln gelten für Vektorfelder $\mathbf{v} = (0, Q, 0)$ beziehungsweise $\mathbf{v} = (P, 0, 0)$; $P, Q \in C^1(\tilde{\Omega})$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} Q \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad , \text{ falls } \Omega \text{ ein Normalbereich bezüglich der } x_1\text{-}x_3\text{-Ebene ist.} \quad (1.15)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_1} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} P \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad , \text{ falls } \Omega \text{ ein Normalbereich bezüglich der } x_2\text{-}x_3\text{-Ebene ist.} \quad (1.16)$$

Addition der Gleichungen (1.14) - (1.16) ergibt den allgemeinen Fall (1.13).

Bemerkung 1.39. Der GAUSSsche Integralsatz gilt auch für allgemeinere Bereiche Ω , insbesondere für solche, welche sich in endlich viele Teilbereiche zerlegen lassen, die jeweils einen Normalbereich bezüglich aller Koordinatenebenen darstellen. Dabei heben sich Integrale über *gemeinsame* Trennflächen der Teilbereiche auf.

Beispiel 1.40. Gesucht ist $I := \int_{\partial\Omega} (4x_1x_3, -x_2^2, x_2x_3) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$, wenn $\Omega = [0, 1]^3$ der Einheitswürfel im \mathbb{R}^3 ist. Es ist $\operatorname{div} \mathbf{v} = 4x_3 - x_2$. Mit GAUSSSchem Integralsatz 1.37 ergibt sich dann

$$I = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4x_3 - x_2) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 4 \int_0^1 x_3 \, dx_3 - \int_0^1 x_2 \, dx_2 = 2x_3^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2}x_2^2 \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

1.3.2.2 Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes

1. *Volumenformel:*

$$|\Omega| = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (1.17)$$

$$\text{denn } \operatorname{div} \mathbf{x} = 3 \Rightarrow |\Omega| = \int_{\Omega} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{x} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

2. *Formel der partiellen Integration:*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \cdot v \cdot n_j \, d\sigma, \quad n_j = \cos(\angle(\mathbf{n}, \mathbf{e}_j)) \quad (1.18)$$

für $u, v \in C^1(\tilde{\Omega})$, denn für $\mathbf{v} = u v \mathbf{e}_j$ ist $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u v \mathbf{e}_j) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u v \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ und $\operatorname{div}(u v \mathbf{e}_j) = \frac{\partial(uv)}{\partial x_j}$.

3. 1. GREENSche^{III} Formel:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u \Delta v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma \quad (1.19)$$

für $u, v \in C^2(\tilde{\Omega})$ und $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$ (Richtungsableitung von v in Richtung von \mathbf{n} , äußere Normalenableitung von v).

Beweis. Mit $\mathbf{v} = u \nabla v = u \operatorname{grad} v$ ist $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla v = \nabla(u \nabla v) = \nabla u \nabla v + u \Delta v$. Integration und der GAUSSSche Integralsatz 1.37 liefern die Formel. \square

4. 2. GREENSche Formel:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\sigma \quad (1.20)$$

Die Formel ergibt sich aus der 1. GREENSchen Formel mit Vertauschung von u und v sowie Subtraktion.

1.3.3 Der Integralsatz von Stokes

Dieser Integralsatz stellt ebenfalls eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung^{IV} im Höherdimensionalen dar. Wir wollen wieder ein Integral durch Randwerte des Integranden ausdrücken.

Satz 1.41 (Der Satz von STOKES^V im euklidischen Raum).

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}} \quad (1.21)$$

mit

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Ausführlich lautet der STOKESSche Integralsatz

$$\int_{\mathcal{F}} \left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) n_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) n_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) n_3 \right) \, d\sigma = \int_{\partial\mathcal{F}} v_1 \, dx_1 + v_2 \, dx_2 + v_3 \, dx_3 \quad (1.22)$$

1.3.3.1 Beweis des Stokesschen Integralsatzes

Beweis. Beweis des STOKESSchen Integralsatzes mittels des GAUSSSchen Integralsatzes in der Ebene unter folgenden *Vorraussetzungen*:

^{III}GEORGE GREEN (1793-1841), englischer Mathematiker und Physiker.

^{IV} $\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a)$, falls $F' = f$.

^VSIR GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903), irischer Physiker und Mathematiker

1. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $G \subset B$ und B ein Normalbereich bezüglich beider Koordinatenachsen mit positiv orientiertem stückweisem C^1 -Rand ∂B , das heißt

$$B = \{(u, v) \mid u \in [a, b], f_1(u) \leq v \leq f_2(u)\} = \{(u, v) \mid v \in [c, d], g_1(v) \leq u \leq g_2(v)\}$$

f_1, f_2, g_1, g_2 sind stückweise C^1 -Funktionen.

2. Sei $\Phi \in C^2(G)$ und eine zulässige C^2 -Paramterisierung von $\mathcal{F} = \Phi(B)$ über den Parameterbereich B , $\partial\mathcal{F} = \Phi(\partial B)$. Jede C^1 -Paramterisierung von ∂B liefert damit eine C^1 -Paramterisierung von $\partial\mathcal{F}$.

3. \mathbf{v} sei ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Menge $M \supset \mathcal{F}$.

Behauptung: Dann gilt die Formel des STOKESSchen Integralsatzes.

Beweisführung:

1. Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{v} = (P, 0, 0)$, $P \in C^1(M)$ und setzen $p(u, v) := P(\Phi(u, v))$ für $(u, v) \in B$. $\partial B : (u, v) = \gamma(t), t \in [0, 1]$. Daraus folgt: $\Phi \circ \gamma$ ist eine Paramterisierung von $\partial\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 P(\Phi(\gamma(t))) \underbrace{dx_1}_{=\frac{d\Phi_1(\gamma(t))}{dt} dt} \\ &= \int_0^1 p(\gamma(t)) \left\langle \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right), \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt \\ \left(\frac{d\Phi_1(\gamma(t))}{dt} \right) &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial u}(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial\Phi_1}{\partial v}(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) \\ &= \oint_{\partial B} p \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} du + p \frac{\partial\Phi_2}{\partial v} dv \end{aligned}$$

Die Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes in der $u - v$ -Ebene liefert

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_B \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} \right) \right) du dv \\ &= \int_B \left(\left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} \right) + \left(p \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial u\partial v} - p \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial v\partial u} \right) \right) du dv \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial\Phi_3}{\partial u} \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} &= -\frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial(\Phi_3, \Phi_1)}{\partial(u, v)} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_2} N_3 + \frac{\partial P}{\partial x_3} N_2 \\ &= \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \\ \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_B \text{rot } \mathbf{v}(\Phi(u, v)) \mathbf{N}(u, v) du dv \\ &= \int_{\mathcal{F}} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \underbrace{do}_{=||\mathbf{N}|| du dv} \end{aligned}$$

□

2. Eine analoge Formel gilt für $\mathbf{v} = (0, Q, 0)$ beziehungsweise $\mathbf{v} = (0, 0, R)$ mit $Q, R \in C^2(M)$. Der Fall eines allgemeinen C^1 -Vektorfeldes \mathbf{v} ergibt sich wegen der Additivität der Integrale im Integranden auf beiden Seiten der Formel im STOKESSchen Integralsatz 1.41.

Bemerkung 1.42. Der STOKESSche Integralsatz gilt auch für allgemeinere Parameterbereiche B beziehungsweise Flächen \mathcal{F} , zum Beispiel für solche, welche aus Teilflächen \mathcal{F}_k bestehen mit $\mathcal{F}_k = \Phi(B_k)$ und $B = \bigcup_{k=1}^m B_k$ unter der Bedingung, dass die B_k die im Beweis genannten Voraussetzungen erfüllen. Dabei ist $C_{kj} = B_k \cap B_j$ für $k \neq j$ entweder leer, aus einzelnen Punkten bestehend, oder eine stückweise C^1 -Kurve

$$\Gamma_{kj} = \Phi(C_{kj}) = \partial\mathcal{F}_k \cap \partial\mathcal{F}_j$$

Wegen Additivität gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{k=1}^m \int_{\mathcal{F}_k} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{k=1}^m \oint_{\partial\mathcal{F}_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.23)$$

Auf dem gemeinsamen Rand Γ_{kj} ist die Orientierung abhängig von der Orientierung von C_{kj} . C_{kj} wird in unterschiedlicher Richtung durchlaufen, je nachdem, ob die Kurve als Teil von ∂B_k oder ∂B_j anzusehen ist. Die Integrale $\int_{\Gamma_{kj}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$ haben somit unterschiedliche Vorzeichen und heben sich somit in der Summe gegenseitig auf. Damit folgt

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{k=1}^m \int_{\partial\mathcal{F}_k \cap \partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.24)$$

Spezialfall: Ist \mathcal{F} eine *geschlossene* Fläche, zum Beispiel eine Kugelsphäre oder Oberfläche eines Torus, so ist $\partial\mathcal{F} = \emptyset$ und $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$.

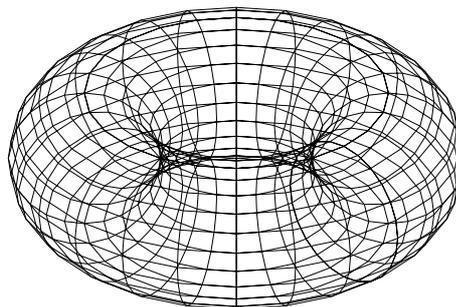


Abb. 1.7: Torus

Beispiel 1.43. Gegeben ist ein Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \sin(x_1 x_3) + e^{x_2} \\ \cosh\left(x_2 e^{(x_1 + x_3)^9} \ln(1 + x_1^2 x_2^2)\right) \end{pmatrix}$$

Sei \mathcal{F} eine beliebige C^2 -Fläche und $\partial\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0, (x_1, x_2) \in \partial U_r(0)\}$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \oint_{\partial U_r(0)} v_1 \, dx_1 + v_2 \, dx_2 \\ &= \oint_{\partial U_r(0)} x_1^2 \, dx_1 + e^{x_2} \, dx_2 \\ &= \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

da (x_1^2, e^{x_2}) ein ebenes konservatives Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 ist wegen $(x_1^2, e^{x_2}) = \nabla \left(\frac{x_1^3}{3} + e^{x_2} \right)$.

Kapitel 2

Funktionentheorie

2.1 Holomorphe Funktionen

2.1.1 Darstellung

Wir betrachten Funktionen aus \mathbb{C} in \mathbb{C} , das heißt sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge komplexer Zahlen, so heißt $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine *komplexe Funktion*. Schreibt man

$$w = f(z) \quad z \in D, z = x + iy, w = u + iv$$

mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, so ist

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y) \qquad \operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y) \qquad (2.1)$$

Beispiel 2.1 ($f(z) = e^z$).

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$$

Einerseits lässt sich f als Abbildung $A_f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ aus dem \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^2 auffassen, andererseits kann man die Körpereigenschaften von \mathbb{C} ausnutzen. Die weitgehende Ausnutzung der multiplikativen Struktur von \mathbb{C} ist Gegenstand der *Funktionentheorie* beziehungsweise der *komplexen Analysis*. Das führt zu tiefgreifenden Berechnungen und Resultaten, welche im \mathbb{R} nur sehr schwer oder gar nicht möglich sind. Die Topologie von \mathbb{C} wird bestimmt durch die Eigenschaften des euklidischen Vektorraumes \mathbb{R}^2 versehen mit der Standardnorm

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| = |z| \qquad (\text{Betrag von } z). \qquad (2.2)$$

Insbesondere ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a, a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = \operatorname{Re}(a) \qquad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = \operatorname{Im}(a) \qquad (2.3)$$

2.1.2 Differentiation komplexer Funktionen

Definition 2.2 (Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphe Funktion). 1. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ sowie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Dann heißt f in z_0 (komplex) differenzierbar mit der komplexen Ableitung $f'(z_0)$, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \quad (2.4)$$

existiert.

2. Man nennt $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in D , falls f in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist und $f'(z)$ stetig auf D ist.

Bemerkung 2.3. Die Voraussetzung der Stetigkeit von f' ist eigentlich überflüssig, da mit weitergehenden Mitteln bewiesen werden kann, dass aus der Existenz von f' für alle $z_0 \in D$ bereits die Stetigkeit von f' folgt.

Wegen der Analogie zum Reellen übertragen sich auch alle Differentiationsregeln wörtlich ins Komplexe. Insbesondere gilt wieder die Zerlegungsformel:

$$f \text{ ist in } z_0 \text{ komplex differenzierbar} \Leftrightarrow f(z_0 + h) - f(z_0) = bh + r(h) \quad (2.5)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Dabei ist $b = f'(z_0)$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Stetigkeit von f in z_0 , das heißt aus der Differenzierbarkeit von f in z_0 folgt die Stetigkeit von f in z_0 .

Beispiel 2.4. 1. Aus Definition 2.2: Ist $f(z) = \text{const.}$ in D , so ist $f'(z) = 0$.

2. Aus Definition 2.2: Ist $f(z) = z$ in D , so ist $f'(z) = 1$.

3. Aus der Produktregel folgt: $(z^m)' = mz^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$. Allgemein gilt: Ist

$$p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

so ist

$$p'(z) = ma_m z^{m-1} + (m-1)a_{m-1} z^{m-2} + \dots + a_1.$$

4. Allgemeiner gilt für eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$ mit einem positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ die gliedweise Differentiation von $P(z)$ im Innern des Konvergenzkreises $U_\rho(z_0)$ (s. Herleitung der Differentiation von $P(z)$ im Reellen):

$$P'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m (z - z_0)^{m-1}.$$

2.1.3 Zusammenhang zwischen komplexer Ableitung und Jacobimatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$A'_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Satz 2.5. Die komplexe Funktion $f = u + iv$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann komplex differenzierbar, wenn die reelle Abbildung A_f differenzierbar ist im Punkt (x_0, y_0) und dort gleichzeitig die CAUCHY-RIEMANSCHEN Differentialgleichungen

$$\boxed{u_x = v_y \quad u_y = -v_x} \quad (2.8)$$

gelten. In diesem Fall ist

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \quad (2.9)$$

und

$$|f'(z_0)|^2 = \det A'_f(x_0, y_0) \quad (2.10)$$

Beweis. i) Wenn $f'(z_0)$ existiert, so gilt die Zerlegungsformel (2.5). Wir zerlegen (2.5) in Real- und Imaginärteil mit

$$f'(z_0) = \alpha + i\beta \quad h = h_1 + ih_2 \quad r(h) = r_1(h_1, h_2) + ir_2(h_1, h_2) \quad \alpha, \beta, h_1, h_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (2.5) &\Leftrightarrow u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) = \alpha h_1 - \beta h_2 + r_1 \\ &\quad v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) = \alpha h_2 + \beta h_1 + r_2 \\ &\Leftrightarrow A_f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - A_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ folgt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$. Mit $|r| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \geq |r_j|$, $j = 1, 2$ ergibt sich $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{r_j}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$, das heißt die Abbildung A_f ist in (x_0, y_0) differenzierbar mit

$$A'_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ \beta = v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

ii) Umgekehrt ergibt sich aus der Differenzierbarkeit von A_f in (x_0, y_0) und (2.8) die Existenz von $f'(z)$ mit

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \alpha + i\beta = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \\ \det A'_f(x_0, y_0) &= \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z_0)|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Folgerung 2.6. f ist holomorph in D genau dann, wenn $u, v \in C^1(D)$ und die CAUCHY-RIEMANSCHEN Differentialgleichungen (2.8) erfüllt sind.

Beispiel 2.7. 1.

$$\begin{aligned} f(z) = e^z & \quad u = \operatorname{Re}(f) = e^x \cos y & \quad v = \operatorname{Im}(f) = e^x \sin y \\ u_x = e^x \cos y = v_y & \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^z$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} mit $(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

2.

$$f(z) = \bar{z} = x - iy \quad \Rightarrow \quad u = x \quad v = -y \quad u_x = 1 \neq v_y = -1$$

Für diese komplexe Funktion ist $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, jedoch ist f nirgendwo komplex differenzierbar.

Weitere Folgerungen aus den CAUCHY-RIEMANSCHEN Differentialgleichungen (2.8):

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in G mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$, so ist $f(z) = \text{const.}$ in G , denn $f'(z) = 0$ impliziert $u_x = v_y = v_x = u_y = 0$, das heißt $A_f(x, y) = \text{const.}$
2. **Satz 2.8** (Satz über die Umkehrfunktion). Sei f holomorph in G , $f'(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in G$. Dann existieren Umgebungen $U := U_\delta(z_0) \subset G$ und $V := U_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$, $w_0 = f(z_0)$, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Die Umkehrfunktion $g : V \rightarrow U$ ist holomorph in V mit der Ableitung

$$\boxed{g'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(g(w))}} \quad w = f(z) \Leftrightarrow z = g(w) \quad (2.11)$$

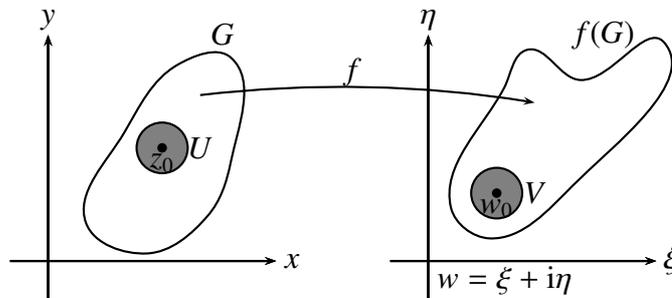


Abb. 2.1: Satz über die Umkehrfunktion

Beweis. $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \det A'_f(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 > 0 \Rightarrow A'_f(x_0, y_0)$ ist regulär. Nach dem Satz über implizite Funktionen (s. Analysis II) ist A_f eine reelle bijektive C^1 -Abbildung von U auf V und für die Umkehrabbildung $A_g : V \rightarrow U$ gilt

$$A'_g(\xi, \eta) = A'_f(x, y)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{mit } f'(z) = \alpha + i\beta,$$

$$A'_g = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist

$$A'_g = \begin{pmatrix} \mu_\xi & \mu_\eta \\ \nu_\xi & \nu_\eta \end{pmatrix} \quad g(w) = \mu(\xi, \eta) + i\nu(\xi, \eta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_\xi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \nu_\eta \\ \nu_\xi = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = -\mu_\eta. \end{cases}$$

Das heißt, die reellen Funktionen μ, ν erfüllen die CAUCHY-RIEMANSCHEN Differentialgleichungen für jedes $(\xi, \eta) \in V$. g ist somit holomorph in V mit

$$g'(w) = \mu_\xi + i\nu_\xi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\overline{f'(z)}}{|f'(z)|^2} = \frac{1}{f'(z)}. \quad \square$$

2.1.4 Die komplexe Logarithmusfunktion

$f(z) = e^z$ ist holomorph in \mathbb{C} mit $f'(z) = e^z \neq 0^I$. Wir betrachten

$$\exp : S := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \{w \in \mathbb{C} \mid w = re^{i\phi}, -\pi < \phi < \pi\}$$

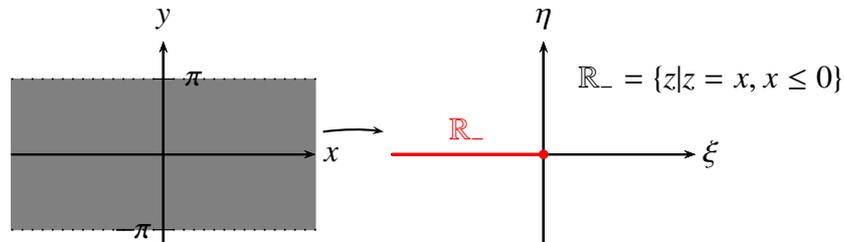


Abb. 2.2: Komplexe Logarithmusfunktion

Die Abbildung ist bijektiv und holomorph^{II}. Nach Satz 2.8 existiert deshalb die Umkehrfunktion, welche mit \log bezeichnet wird.

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \text{ mit } e^{\log w} = w$$

$$\log(e^z) = z \tag{2.12}$$

$$(\log w)' = \frac{1}{w} \tag{2.13}$$

$$w = re^{i\phi} \Leftrightarrow e^{\ln r} e^{i\phi} = e^{\ln r + i\phi} = w \Rightarrow \log w = \ln r + i\phi$$

$$\boxed{\log w = \ln |w| + i \arg w} \tag{2.14}$$

\log heißt *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*. Allgemein heißt eine holomorphe Funktion $L(z)$ ein *Zweig des komplexen Logarithmus* in einem Gebiet $G \ni 0$, falls $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in G$.

Bemerkung 2.9. Mit $L(z)$ ist auch $L(z) + 2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$ wieder ein Zweig des komplexen Logarithmus in G , denn $e^{L(z)+2k\pi i} = e^{L(z)} \underbrace{e^{2k\pi i}}_{=1} = z$. Sind L_1, L_2 zwei Zweige, so gilt $L_1(z) =$

$L_2(z) + 2k\pi i$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, denn $e^{L_1(z)} = z = e^{L_2(z)} \Rightarrow e^{L_1(z)-L_2(z)} = 1 \Rightarrow L_1(z) - L_2(z) = 2\pi i k(z)$ für jedes $z \in G$ mit $k : G \rightarrow \mathbb{Z}$. Aus $k(z) = \frac{L_1(z)-L_2(z)}{2\pi i}$ folgt, dass k holomorph und somit stetig ist. Wegen $k(z) \in \mathbb{Z}$ muss $k(z)$ konstant sein.

2.1.5 Fortsetzung reeller Funktionen im Komplexen

Sei $a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Dann ist die allgemeine komplexe Potenz z^a definiert durch

$$\boxed{z^a := \exp(a \log z)} \tag{2.15}$$

mit

$$(z^a)' = \exp(a \log z) \cdot a(\log z)' = z^a \cdot a \cdot \frac{1}{z} = \underline{\underline{az^{a-1}}} \quad (\text{unter Verwendung der Kettenregel}) \tag{2.16}$$

^Iwegen $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x > 0$

^{II}siehe Übungsaufgabe 43.b)

Beispiel 2.10. Wir betrachten eine ebene, stationäre, inkompressible und wirbelfreie Strömung mit einem Geschwindigkeitsfeld (u, v) . Damit ist die Strömung quellenfrei, das heißt $\operatorname{div}(u, v) = u_x + v_y = 0$, und wirbelfrei, das heißt $\operatorname{rot}(u, v, 0) = 0 \Leftrightarrow u_y = v_x \Rightarrow f_1(z) := \overline{u - iv}$ und $f_2(z) = v + iu = i(u - iv) = if_1(z)$ sind holomorph in G , falls $u, v \in C^1(G)$. $f_1(z) = \overline{u + iv}$ heißt *komplexe Geschwindigkeit* des Feldes (u, v) .

Zum Beispiel

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \log z && \text{für } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ &= \ln |z| + i \arg z \\ \Rightarrow u &= \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ v &= -\arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

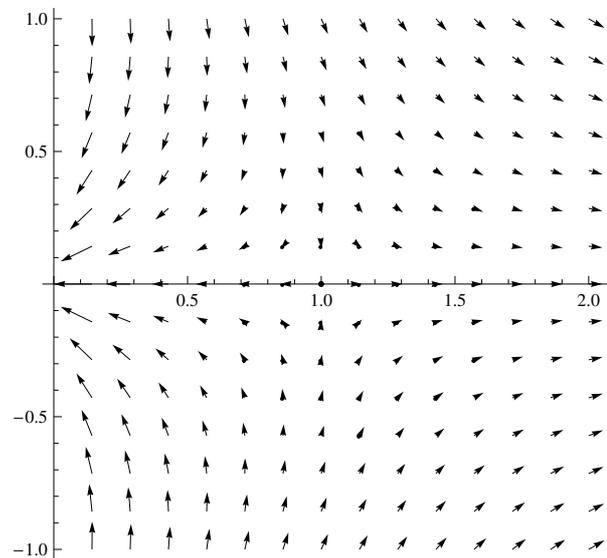


Abb. 2.3: Vektorfeld $f_1(z) = \log z$

2.2 Integralsatz und Integralformel von Cauchy

2.2.1 Komplexe Integrale

Definition 2.11 (Komplexes Riemann-Integral). Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, $t \in [a, b]$ mit reellen Riemann-integrierbaren Funktionen g_1, g_2 , so schreiben wir

$$\boxed{\int_a^b g(t) dt := \int_a^b g_1(t) dt + i \int_a^b g_2(t) dt} \quad (2.17)$$

Beispiel 2.12.

$$\int_0^1 (\sin(\pi t) + it^2) dt = \int_0^1 \sin(\pi t) dt + i \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right|_0^1 + i \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} + \frac{i}{3}}}$$

Definition 2.13 (Komplexes Kurvenintegral).

1. Sei $z(t) = x(t) + iy(t)$ mit $x, y \in C([\alpha, \beta])$. Dann ist $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ eine Kurve in \mathbb{C} . Sie entspricht der reellen Kurve mit der Parameterdarstellung $(x, y) = \gamma(t)$ mit $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ und dem Tangentenvektor $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Der komplexe Tangentenvektor ist $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.

$$\boxed{|\mathcal{C}| = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{z}(t)| dt} \tag{2.18}$$

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine komplexe Funktion auf G und \mathcal{C} eine stückweise C^1 -Kurve. Dann wird das komplexe Kurvenintegral von f entlang dieser Kurve definiert durch

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\dot{z}(t) dt = \int_{\mathcal{C}} u dx - v dy + i \int_{\mathcal{C}} v dx + u dy} \tag{2.19}$$

Bemerkung 2.14. $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ wird auf zwei vektorielle Kurvenintegrale im Reellen zurückgeführt, weil $f\dot{z} = (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) = u\dot{x} - v\dot{y} + i(v\dot{x} + u\dot{y})$. Damit übertragen sich die Eigenschaften dieser reellen Integrale auf $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$. Trotzdem berechnet sich oft $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ bequemer in \mathbb{C} .

Beispiel 2.15 (Wichtige Integrale der Funktionentheorie). Sei $\mathcal{C} = \partial U_r(z_0)$ die Kreislinie um z_0 mit Radius r und positiver Orientierung

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

Abkürzend setzen wir

$$\oint_{\partial U_r(z_0)} f(z) dz =: \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

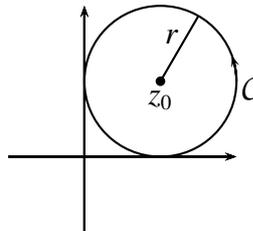


Abb. 2.4: Kurvenintegral

Berechnung von $\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^m} dz$ für $m \in \mathbb{Z}$: Wähle Parametrisierung von $\partial U_r(z_0)$: $z = z_0 + re^{i\phi} =: z(\phi)$ mit $\phi \in (0, 2\pi)$. $\dot{z} = ire^{i\phi}$, $(z(\phi) - z_0)^m = (re^{i\phi})^m = r^m e^{im\phi}$.

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^m} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\phi}}{r^m e^{im\phi}} d\phi = ir^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)\phi} d\phi$$

$$m = 1 : \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = \underline{2\pi i}$$

$$m \neq 1 : \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^m} dz = ir^{1-m} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((1-m)\phi) d\phi}_{=0} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin((1-m)\phi) d\phi}_{=0} \right)$$

$$= \underline{0}$$

2.2.2 Der Cauchysche Integralsatz

Satz 2.16 (CAUCHYSCHER Integralsatz). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und f eine in G holomorphe Funktion. Dann ist $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ wegunabhängig für jede stückweise C^1 -Kurve $\mathcal{C} \subset G$, also

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz} \quad (2.20)$$

für zwei C^1 -Kurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset G$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Gleichbedeutend damit ist

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \quad (2.21)$$

für jede geschlossene C^1 -Kurve $\mathcal{C} \subset G$.

Bemerkung 2.17. Der CAUCHYSCHER Integralsatz gilt unter „schwächeren“ Anforderungen an G und \mathcal{C} , zum Beispiel für einfach zusammenhängende Gebiete G (Gebiete ohne Löcher). *Aber:* Für beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ gilt der CAUCHYSCHER Integralsatz im Allgemeinen nicht. Zum Beispiel ist $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ holomorph im Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, aber

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \neq 0$$

Beweis von Satz 2.16. Da $f = u + iv$ holomorph in G ist, gelten die CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen (2.8). Dies sind aber gerade die Integrabilitätsbedingungen für die beiden reellen Vektorfelder $(u, -v)$ und (v, u) . Damit sind die beiden Felder Gradientenfelder^{III} und $\int_{\mathcal{C}} (u dx - v dy)$ sowie $\int_{\mathcal{C}} (v dx + u dy)$ sind wegunabhängig für $\mathcal{C} \subset G$. Daraus folgt die Behauptung. \square

2.2.3 Stammfunktionen

Wegunabhängige Integrale ließen sich im \mathbb{R}^2 mittels Stammfunktion berechnen. Das gleiche gilt in \mathbb{C} , wobei $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine *Stammfunktion* zu $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ genannt wird, wenn $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$. Genauer gilt:

Satz 2.18. Ist f stetig auf $G \subset \mathbb{C}$ und $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ ist wegunabhängig für C^1 -Kurven $\mathcal{C} \subset G$, dann ist für beliebiges aber festes $a \in G$ die Funktion $F_0(z) := \int_{\mathcal{C}_0} f(\zeta) d\zeta$ mit einer beliebigen C^1 -Kurve \mathcal{C}_0 von a nach $z \in G$ eine holomorphe Stammfunktion zu f in G . Für irgendeine holomorphe Stammfunktion F zu f gilt

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_0} f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(a)} \quad (2.22)$$

Beweis. 1. Sei $f = u + iv$. $\int_{\mathcal{C}} (u dx - v dy)$ und $\int_{\mathcal{C}} (v dx + u dy)$ sind wegunabhängig und es existieren Potentiale ϕ, ψ zu $(u, -v)$ beziehungsweise (v, u) . Also gilt

$$\phi_x = u \quad \phi_y = -v \quad \psi_x = v \quad \psi_y = u$$

Setze $F_0(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. Dann sind für F_0 in G die Gleichungen (2.8) erfüllt. Somit ist F_0 holomorph in G mit $F_0'(z) = \phi_x + i\psi_x = u + iv = f(z)$. Weiterhin ist $F_0(z) = \int_{\mathcal{C}_0} (u dx - v dy) + i \int_{\mathcal{C}_0} (v dx + u dy) = \int_{\mathcal{C}_0} f(z) dz$.

^{III}Beachte: G muss sternförmig sein.

2. Für $z \in G$ gilt: $F'(z) = f(z) = F'_0(z)$, das heißt $(F - F_0)' = 0$ in G . Somit folgt $F(z) = F_0(z) + C$ und $\int_{C_0} f(z) dz = F_0(z) - \underbrace{F_0(a)}_{=0} = F(z) - F(a)$. \square

Folgerung 2.19. Jede holomorphe Funktion f hat im sternförmigen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion.

Beispiel 2.20. Gesucht ist $\int_C \cos(z) dz$, wobei C die positiv orientierte Kreislinie um i mit Radius 1 in $\text{Re}(z) > 0$ ist. Da $\cos(z)$ holomorph in \mathbb{C} ist, gilt

$$\int_C \cos(z) dz = \sin(z) \Big|_0^{2i} = \sin(2i) = i \sinh 2 = \frac{i}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

da $\sin(z) = (\cos(z))'$.

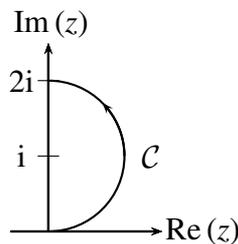


Abb. 2.5: $\int_C \cos(z) dz$

2.2.4 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Satz 2.21 (Hilfssatz). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und g holomorph in $G \setminus \{z_0\}$. Ist $G \supset U_R(z_1) \supset U_r(z_0)$, so gilt

$$\int_{|z-z_1|=R} g(z) dz = \int_{|z-z_0|=r} g(z) dz \tag{2.23}$$

Beweis.

$C_1 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ ist eine stückweise C^1 -Kurve. C_1 wird in ein sternförmiges Gebiet $G_1 \subset G \setminus \{z_0\}$ eingebettet. Dann liefert der CAUCHYSche Integralsatz 2.16 $\oint_{C_1} g(z) dz = 0$.

Analog sei $C_2 := \Gamma_5 \cup -\Gamma_3 \cup \Gamma_6 \cup -\Gamma_2$. Satz 2.16 liefert wieder $\int_{C_2} g(z) dz = 0$. Somit ist $\int_{C_1} g(z) dz + \int_{C_2} g(z) dz = 0$. Wegen Additivität und Orientierungsabhängigkeit des Wegintegrals ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2, \Gamma_3} g(z) dz &= - \int_{-\Gamma_2, -\Gamma_3} g(z) dz \\ &\stackrel{\text{pos. Orient.}}{=} \partial U_R(z_1) \\ \int_{\Gamma_4 \cup \Gamma_6} g(z) dz &\stackrel{\text{neg. Orient.}}{=} -\partial U_r(z_0) \end{aligned}$$

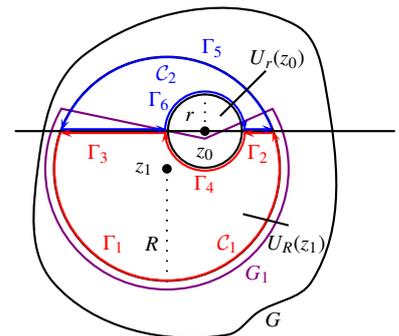


Abb. 2.6: Grafik zum Beweis

Damit folgt

$$\int_{\partial U_R(z_1)} g(z) dz + \int_{-\partial U_r(z_0)} g(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{|z-z_1|=R} g(z) dz - \int_{|z-z_0|=r} g(z) dz = 0 \quad \square$$

Ergänzung:

Satz 2.22 (Deformationsatz). Die Formel (2.23) bleibt richtig, falls $\partial U_R(z_1)$ ersetzt wird durch eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve $\mathcal{C} \subset G$, $\mathcal{C} = \partial \tilde{G}$ mit positiver Orientierung. Es ist $\tilde{G} \ni z_0$ und \mathcal{C} darf keine Doppelpunkte enthalten.

Aus dem Deformationsatz beziehungsweise der Formel (2.23) leiten wir eine wichtige Eigenschaft holomorpher Funktionen her:

Satz 2.23 (CAUCHYSche Integralformel). Sei f holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $\overline{U_R(z_1)} \subset G$. Dann gilt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0)} \quad \forall z_0 \in U_R(z_1) \quad (2.24)$$

Die CAUCHYSche Integralformel besagt, dass bei holomorphen Funktionen f ihre Werte im Inneren von $U_R(z_1)$ eindeutig bestimmt sind durch die Werte von f auf $\partial U_R(z_1)$. Mit anderen Worten: Die Holomorphie von f erzeugt so eine enge Bindung zwischen den Funktionswerten, dass der Funktionsverlauf in $U_R(z_1)$ vollständig durch den Verlauf von f auf $\partial U_R(z_1)$ bestimmt ist.

Beweis.

1. Setzt man $g(z) := \frac{f(z)}{z-z_0}$, so ist g holomorph in $G \setminus \{z_0\}$. Anwendung von (2.23) ergibt $\int_{|z-z_1|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$, wenn $0 < r < R - |z_1 - z_0|$ ($\Rightarrow U_r(z_0) \subset U_R(z_1)$).

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \underbrace{\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0}}_{=2\pi i} + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz = 0$.

2. Da f stetig in $U_R(z_1)$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $z : |z - z_0| < \delta$. Mit $0 < r < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \\ &\stackrel{(\text{ÜA 48.b})}{\leq} \frac{1}{2\pi} |\partial U_r(z_0)| \max_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} < \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt (2.24). □

Folgerung 2.24 (Mittelwertformel). Wähle $z_0 = z_1$ in (2.24).

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1|=R} \frac{f(z)}{z-z_1} dz & z &:= z_1 + Re^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_1 + Re^{i\phi})}{Re^{i\phi}} \underbrace{\dot{z}(\phi)}_{=iRe^{i\phi}} d\phi \\ &\Rightarrow \boxed{f(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 + Re^{i\phi}) d\phi} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Beispiel 2.25 (Anwendung der CAUCHYSchen Integralformel).

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\cosh z}{z} dz = \int_{|z-i|=2} \frac{\cosh z}{z-0} dz = 2\pi i \cosh 0 = \underline{\underline{2\pi i}}$$

2.3 Hauptsätze über holomorphe Funktionen

2.3.1 Der Entwicklungssatz

Mittels der CAUCHYSchen Integralformel gelingt es, teils überraschende Resultate über holomorphe Funktionen herzuleiten, welche in der reellen Analysis *keine* Entsprechung haben, zum Beispiel die Entwicklung in eine Potenzreihe. Da $\int_C f(z) dz$ zurückgeführt wird auf zwei reelle Kurvenintegrale (siehe (2.19) und Bemerkung 2.14) wenn C gegeben ist durch $x = x(t), y = y(t), t = [\alpha, \beta]$, folgt der *Satz über Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung*.

Satz 2.26. Sei C eine stückweise C^1 -Kurve und $(g_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge komplexer Funktionen, welche stetig auf C sind und *gleichmäßig* auf C gegen g konvergieren. Dann ist g stetig auf C und $\int_C g_n(z) dz \rightarrow \int_C g(z) dz$ für $n \rightarrow \infty$, das heißt

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C g_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) dz} \quad (2.26)$$

Satz 2.27 (Entwicklungssatz für holomorphe Funktionen). Eine im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion f lässt sich in jedem Punkt $z_0 \in G$ in eine eindeutige Potenzreihe entwickeln. Das heißt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in U_R(z_0) \subset G \quad (2.27)$$

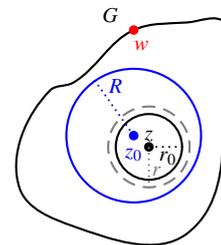


Abb. 2.7: Entwicklungssatz

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist größer oder gleich $\inf_{w \in \partial G} |w - z_0|$.

Beweis.

1. Sei $U_R(z_0) \subset G, z \in U_R(z_0)$. Dann ist $r_0 := |z - z_0| < R$ und es existiert $r \in (r_0, R)$. Mit (2.24) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

2. Entwicklung des Integranden in eine Reihe: Für $\zeta \in \partial U_r(z_0)$ sei $w := \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ mit $|w| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{r_0}{r} < 1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) + (z_0 - z)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

3. Diese Reihe wollen wir integrieren und zeigen deshalb ihre gleichmäßige Konvergenz bezüglich der Integrationsvariable ζ bei festem z, z_0 .

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| \leq \underbrace{\max_{\zeta \in \partial U_R(z_0)} |f(\zeta)|}_{=:M} \frac{|z - z_0|^n}{|\zeta - z_0|^{n+1}} = M \frac{r_0^n}{r^{n+1}} = \frac{M}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n$ wegen $r_0 < r$ konvergiert, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz nach dem WEIERSTRASSSchen Majorantenkriterium^{IV}.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{|\zeta - z_0|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n \\ &\Rightarrow \boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n}. \end{aligned} \quad (2.28) \quad \square$$

2.3.2 Folgerungen aus dem Entwicklungssatz

2.3.2.1 Analytizität

1. Da wie im Reellen jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzradius gliedweise und unendlich oft differenzierbar ist, ist auch f unendlich oft differenzierbar. Damit folgt: *Jede holomorphe Funktion ist im Inneren ihres Definitionsbereiches D unendlich oft differenzierbar (kurz: $f \in C^\infty(\text{int } D)$).*

Bemerkung 2.28. Eine Funktion, welche die Eigenschaft hat, in jedem $z_0 \in G$ in eine Potenzreihe entwickelbar zu sein, heißt (*komplex*) *analytisch* in G . Im Komplexen gilt: *f ist holomorph genau dann, wenn f analytisch ist.*

Aber: Im Reellen gilt dies nicht! Zum Beispiel ist die reelle Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft in \mathbb{R} differenzierbar, jedoch in $x_0 = 0$ *nicht* in eine Potenzreihe entwickelbar.

2. Aus dem Beweis des Entwicklungssatzes folgt die CAUCHYSche Abschätzungsformel:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &\Rightarrow \boxed{|a_n| \leq r \max_{\zeta \in \partial U_r(z_0)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r^n}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Weiterhin folgt wie im Reellen aus $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \Rightarrow a_0 = f(z_0) \Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1} \Rightarrow$

$$a_1 = f'(z_0) \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(z_0) \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

^{IV} siehe Analysis II

Die Potenzreihe von f ist folglich die *komplexe TAYLORREIHE* von f mit den *CAUCHYSCHEN ABLEITUNGSFORMELN*

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta} \quad (2.30)$$

Bemerkung 2.29. Die Ableitungsformeln ergeben sich induktiv durch formale Differentiation nach z_0 unter dem Integralzeichen.

Beispiel 2.30. (a) $f(z) = \log(1+z)$ ist holomorph im Gebiet G mit $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leq -1\}$. $f(z)$ ist somit in $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar.

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n && \text{mit } a_0 = f(0) = \log(1) = 0 \\ a_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+0)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ &= \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nebenrechnung: } f'(z) &= \frac{1}{1+z} && f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2} \\ \dots &&& f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+z)^n} \end{aligned}$$

Es ist der Konvergenzradius $\rho \geq 1$. Wegen Divergenz der Reihe für $z = -1$ ergibt sich $\rho = 1$.

(b) Im Allgemeinen wird man versuchen, die Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion durch geeignete Operationen mit bekannten Reihen zu erhalten, zum Beispiel durch Umordnung. $f(z) = \frac{1}{a-z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Potenzreihenentwicklung um $z_0 \neq a$:

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

für $|z-z_0| < |z_0-a|$ (siehe Beweis des Entwicklungssatzes 2.27).

3. **Satz 2.31** (Satz von MORERA (1856-1909)). Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und f eine auf G stetige Funktion mit *wegunabhängigem* Integral $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ für alle $\mathcal{C} \subset G$ (stückweise C^1 -Kurven). Dann ist f holomorph in G .

Beweis. Nach dem Satz über Existenz einer Stammfunktion ist $F_0(z) := \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$ für eine Kurve $\mathcal{C} \subset G$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt z eine Stammfunktion zu f , das heißt $F_0'(z) = f(z)$. Aus der Holomorphie von F_0 folgt, dass F_0 unendlich oft komplex differenzierbar ist, somit ist auch f unendlich oft komplex differenzierbar und folglich holomorph. \square

2.3.2.2 Identitätssatz

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt der

Satz 2.32 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). Sind f, g holomorph im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in G, z_n \neq z_0$ und $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f = g$ in G .

Anwendungen des Identitätssatzes:

- (a) Die holomorphe Fortsetzung der *reellen* elementaren Funktionen ins Komplexe ist nur auf eine Weise möglich, denn zwei solcher holomorpher Fortsetzungen fallen auf der reellen Achse zusammen. Aus dem Identitätssatz 2.32 folgt die Gleichheit im komplexen Gebiet.
- (b) Sei f in G holomorph und *nicht konstant*, so hat f' in jeder kompakten Teilmenge $D \subset G$ nur endlich viele Nullstellen, denn gelte für eine abzählbare unendliche Menge $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset D : f'(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann besitzt (z_n) wegen Kompaktheit von D einen Häufungspunkt $z_0 \in D$. Das heißt es existiert eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (z_n)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0, f'(z_{n_k}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Identitätssatz 2.32 liefert $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$. Somit ist $f(z)$ konstant.

Zusammen mit der CAUCHYScher Integralformel (2.24) ergibt sich daraus:

Satz 2.33 (Maximum-Prinzip). Sei f im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph und besitze $|f|$ ein Maximum im Inneren von G , so ist f konstant in G .

Beweis. 1. Sei $z_0 \in G$ mit $M := |f(z_0)| = \max_{z \in G} |f(z)|$. Wir zeigen $f'(z_0) = 0$.

Betrachte $g_n(z) := (f(z))^n, n \in \mathbb{N}$, wobei $g_n(z)$ holomorph in G ist. Mit der CAUCHYSchen Ableitungsformel (2.30) folgt

$$g'_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g_n(z)}{(z-z_0)^2} dz \Rightarrow |g'_n(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{z \in \partial U_r(z_0)} |g_n(z)| = \frac{1}{r} \max_{z \in \partial U_r(z_0)} |f(z)|^n \leq \frac{1}{r} M^n$$

$$|g'_n(z_0)| = n |f(z_0)|^{n-1} |f'(z_0)| = n M^{n-1} |f'(z_0)| \Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{M}{nr}.$$

Mit $n \rightarrow \infty$ folgt $|f'(z_0)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{nr} = 0 \Rightarrow f'(z) = 0$.

2. Nach der 2. Anwendung des Identitätssatzes 2.32 kann es für $f \neq \text{const}$ in $\overline{U_r(z_0)} \subset G$ nur *endlich viele* Stellen $z_0, \dots, z_m \in \overline{U_r(z_0)}$ mit $|f(z_j)| = M$ geben. Wähle $r_0 > 0$ und $r_0 < \min_{j=1, \dots, m} |z_j - z_0|$. Dann ist $|f(z)| < M$ für alle $z \in \overline{U_{r_0}(z_0)}$. Mit CAUCHYScher Integralformel (2.24) folgt

$$\underbrace{|f(z_0)|}_{=M} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right| \leq \max_{z \in \partial U_{r_0}(z_0)} |f(z)| < M$$

Dies führt zum Widerspruch, falls f nicht konstant ist. □

Beispiel 2.34. Gegeben sei $f(z) = z^2 - z$. Gesucht wird $\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| =: M_0$.

$$\begin{aligned} M_0 &= \max_{|z|=1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |z^2 - z| = \max_{|z|=1} \underbrace{|z|}_{=1} |z - 1| = \max_{\phi \in [0, 2\pi)} |e^{i\phi} - 1| \\ &= \max_{\phi \in [0, 2\pi)} \sqrt{(\cos \phi - 1)^2 + \sin^2 \phi} = \max_{\phi \in [0, 2\pi)} \sqrt{2 - 2 \cos \phi} = \sqrt{2 - 2 \cos \pi} = \underline{\underline{2 = f(-1)}} \end{aligned}$$

2.3.3 Zusammenfassung: Charakterisierung holomorpher Funktionen

Sei f stetig im sternförmigen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $\mathcal{C} \subset G$ eine stückweise C^1 -Kurve.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- f ist holomorph in G
- f ist analytisch in G
- $u, v \in C^1(G, \mathbb{R})$ mit $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
- $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ für alle geschlossenen \mathcal{C} .
- $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ ist wegunabhängig für alle \mathcal{C} .
- f besitzt eine holomorphe Stammfunktion in G .

2.4 Residuentheorie

2.4.1 Laurent-Entwicklung

Oftmals müssen komplexe Funktionen untersucht werden, welche in $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ definiert und holomorph sind. Das heißt, in z_0 liegt eine Definitionslücke von f vor. Man bezeichnet z_0 als *isolierte Singularität* von f . Zum Beispiel ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität für die Funktionen $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$, $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$. Das Verhalten einer solchen Funktion f in $U_\varepsilon(z_0)$ lässt sich genau beschreiben, wenn man eine Verallgemeinerung der TAYLOR-Reihen verwendet: Die sogenannte LAURENT-Reihe nach PIERRE LAURENT (1813-1854).

Definition 2.35.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (2.31)$$

heißt *LAURENT-Reihe*. Diese ist konvergent, wenn die beiden Reihen

$$T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (2.32a)$$

$$H(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n \quad (2.32b)$$

konvergieren. Man nennt $T(z)$ *regulären Teil* (TAYLOR-Reihe, *Nebenteil* der LAURENT-Reihe) und $H(z)$ *singulären Teil* (Potenzreihe in $\frac{1}{z - z_0}$, *Hauptteil* der LAURENT-Reihe).

Bemerkung 2.36. Eigenschaften wie Eindeutigkeit, absolute und gleichmäßige Konvergenz, gliedweise Differenzierbarkeit usw. lassen sich, insbesondere in Ringgebieten $K_{r_1, r_2}(z_0) := U_{r_2}(z_0) \setminus \overline{U_{r_1}(z_0)}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ von der Potenzreihe auf die LAURENT-Reihe übertragen.

Satz 2.37 (Entwicklungssatz). Sei f holomorph in $K_{r_1, r_2}(z_0)$. Dann besitzt f dort eine LAURENT-Entwicklung, das heißt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in K_{r_1, r_2}(z_0)$$

Die Koeffizienten a_n sind eindeutig bestimmt durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \tag{2.33}$$

In jeder kompakten Menge $D \subset K_{r_1, r_2}$ konvergiert die LAURENT-Reihe (2.31) gleichmäßig und absolut.

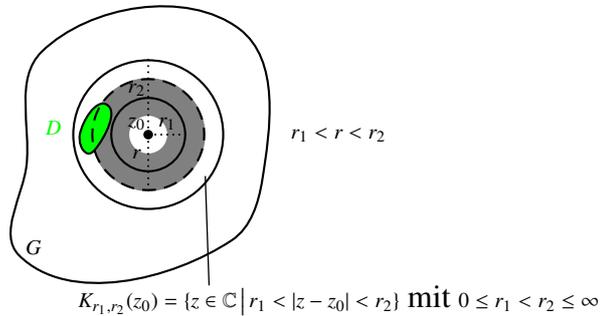


Abb. 2.8: LAURENT-Reihe

Beweis. (Beweis durch Adaption des Beweises des Entwicklungssatzes für Potenzreihen)

i) Sei $z \in K_{r_1, r_2}$ fest. Somit gilt

$$r_1 < \varrho < |z - z_0| < R < r_2$$

$$\overline{K_{\varrho, R}(z_0)} \subset K_{r_1, r_2}(z_0)$$

Γ_1, Γ_2 verlaufen auf $\partial U_\varrho(z_0)$ und $\partial U_R(z_0)$ sowie auf gemeinsamen radialen Strecken. Nach Satz 2.16 ist

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

Weiterhin ist nach (2.24)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

Addition ergibt

$$2\pi i f(z) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \underbrace{\int_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=: I_1} - \underbrace{\int_{|\zeta - z_0|=\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=: I_2} = I_1 - I_2$$

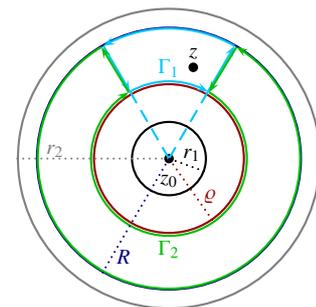


Abb. 2.9: Zum Beweis der LAURENT-Entwicklung

ii) Wir entwickeln den Integranden von I_1 in eine Reihe. Für $\zeta \in \partial U_R(z_0)$ ergibt sich

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{für } |z - z_0| < |\zeta - z_0| .$$

Das heißt, die Reihe konvergiert für $\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$ und nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig bezüglich ζ . Analog erhält man durch Vertauschung von ζ mit z die Reihenentwicklung des Integranden in I_2 :

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - \zeta} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \text{für } \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{\rho}{|z - z_0|} < 1$$

mit gleichmäßiger Konvergenz bezüglich ζ .

iii) Beide Reihen dürfen somit gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= I_1 - I_2 = \int_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|\zeta - z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{\substack{n=0 \\ k:=n+1=1}}^{\infty} (z - z_0)^{-n-1} \int_{|\zeta - z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} dz . \end{aligned}$$

Wegen Satz 2.22 können in den Integralen $\partial U_R(z_0)$ beziehungsweise $\partial U_\rho(z_0)$ durch $\partial U_r(z_0)$ mit $r_1 < r < r_2$ ersetzt werden, ohne dass sich die Integralwerte ändern. Daraus folgt die Formel für $a_n, n \in \mathbb{Z}$. Die Aussage über die gleichmäßige Konvergenz der Reihen folgt wieder aus dem Majorantenkriterium. \square

Beispiel 2.38 (LAURENT-Entwicklung um $e^{\frac{1}{z}}$ in $z_0 = 0$). $e^{\frac{1}{z}} = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph für $z \neq 0$, das heißt für $|z| > 0$, bzw. $z \in K_{0,\infty}(0)$.

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{1}_{=T(z)} + \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{(-k)!} z^k}_{=H(z)}$$

2.4.2 Klassifikation isolierter Singularitäten

Definition 2.39. (1) z_0 heißt *hebbare Singularität* von f , falls $H(z) \equiv 0$, das heißt $a_n = 0$ für $n < 0$. Hier lässt sich f durch $T(z)$ holomorph nach z_0 fortsetzen.

(2) z_0 heißt *Polstelle der Ordnung m* von f , falls $H(z)$ ein Polynom vom Grad m in Potenzen von $\frac{1}{z - z_0}$ ist, das heißt $a_{-m} \neq 0, a_n = 0$ für $n < -m$. Hier hat f die Darstellung $f(z) = (z - z_0)^{-m} h(z)$ mit einer holomorphen Funktion $h, h(z_0) = a_{-m}$.

(3) z_0 heißt *wesentliche Singularität* von f , falls $H(z)$ eine unendliche Potenzreihe in $\frac{1}{z - z_0}$ ist, das heißt $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Beispiel 2.40. 1.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{1}_{T(z)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{H(z)}$$

$z_0 = 0$ ist also eine wesentliche Singularität.

2. $\frac{1}{z} = T(z) + H(z)$ mit $T(z) \equiv 0$, $H(z) = \frac{1}{z}$. $z_0 = 0$ ist also eine Polstelle erster Ordnung.

3.

$$\frac{\sin z}{z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = T(z) \Rightarrow H(z) \equiv 0$$

$z_0 = 0$ ist also eine hebbare Singularität.

Bemerkung 2.41 (Ergänzung). Analog zu den Polstellen definiert man:

f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m , wenn $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$, g holomorph in G .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $f(z)$ hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m .
- $\frac{1}{f(z)}$ hat in z_0 eine Polstelle der Ordnung m .
- $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Beispiel 2.42. $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, $z \neq 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Wir untersuchen den Typ der Singularität in $z_k = 2k\pi i$. Der Nenner $g(z) = e^z - 1$ hat in z_k eine Nullstelle der Ordnung 1, denn $g'(z) = e^z \neq 0$. Für $k \neq 0$ hat damit $f(z)$ in z_k eine einfache Polstelle.

$$k = 0: \quad f(z) = \frac{z}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) - 1} = \frac{z}{1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \dots} \quad \text{für } z \neq 0$$

Da $h(z) = 1 + \frac{z}{2} + \dots$ holomorph in \mathbb{C} ist und $h(z_0) = h(0) = 1 \neq 0$, ist $\frac{1}{h(z)}$ die holomorphe Fortsetzung von f in $z_0 = 0$. Die Singularität ist somit hebbbar. Für f existiert somit eine Potenzreihenentwicklung um $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{B_k}{k!}}_{=a_k} z^k$$

für $|z| < 2\pi$ wegen Singularitäten von f in $z_{\pm 1} = \pm 2\pi i$. In diesem Ansatz sind B_k die **BERNOULLISCHEN ZAHLEN**^V. Berechnung von B_k :

$$\begin{aligned} 1 &= f(z) \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k+n=l} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n+1)!} z^{k+n} \right) && \text{CAUCHYSCHES PRODUKTREIHE} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^l \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(l-k+1)!} \right) z^l && \forall z: 0 < |z| < 2\pi \end{aligned}$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen und Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\begin{aligned} z_0: 1 &= c_0 = B_0 \\ z^l: 0 &= \sum_{k=0}^l \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(l-k+1)!} && l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

^VJAKOB BERNOULLI (1654-1705), Schweizer Mathematiker

Daraus erhält man eine Rekursionsformel zur Berechnung von B_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^l B_k \frac{(l+1)!}{k!(l+1-k)!} &= \sum_{k=0}^l B_k \binom{l+1}{k} = 0 \\ \Rightarrow \binom{l+1}{0} B_0 + \binom{l+1}{1} B_1 + \dots + \binom{l+1}{l} B_l &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Berechnung von B_1 und B_2 :

$$\begin{aligned} B_0 + 2B_1 &= 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2} \\ B_0 + 3B_1 + 3B_2 &= 0 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Für ungerade $n > 1$ ist $B_n = 0$.

2.4.3 Das Residuenkalkül

Definition 2.43 (Residuum). Sei f holomorph in $U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dann heißt der erste Koeffizient des Hauptteils der zugehörigen LAURENTreihe das *Residuum* von f an der Stelle z_0 , das heißt

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz} \quad (2.35)$$

Bemerkung 2.44. Der Begriff *Residuum*^{VI} bezeichnet den Wert des Integrals aus dem CAUCHYSchen Integralsatz (Satz 2.16). Ist f holomorph in z_0 , so folgt $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

Umgekehrt lässt sich folgern: $\text{Res}(f, z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ hat eine Singularität in z_0 . Zum Beispiel ist $\text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 1$. Aber $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}, 0\right) = 0$, jedoch hat $f(z) = \frac{1}{z^2}$ in $z_0 = 0$ einen Pol zweiter Ordnung, denn $\frac{1}{z^2} = H(z) = 0 \cdot \frac{1}{z} + 1 \cdot \frac{1}{z^2}$.

2.4.3.1 Berechnung von Residuen

1. Wählen eines „bequemeren“ Integrationsweges anstelle von $\partial U_r(z_0)$
2. Aus der LAURENT-Entwicklung folgt: Falls $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ existiert, so ist $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ genau dann, wenn f in z_0 einen Pol erster Ordnung oder eine hebbare Singularität besitzt.
3. Rechenregeln:^{VII}

(a)

$$\text{Res}(af + bg, z_0) = a \text{Res}(f, z_0) + b \text{Res}(g, z_0) \quad (2.36)$$

(b) Hat f in z_0 eine einfache Polstelle und ist g holomorph in $U_r(z_0)$, $g(z_0) \neq 0$, so ist

$$\text{Res}(fg, z_0) = g(z_0) \text{Res}(f, z_0) \quad (2.37)$$

^{VI}lat. „Rückstand“

^{VII}siehe auch Übungsaufgabe 55

(c) Hat f in z_0 eine einfache Nullstelle, so ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f}, z_0\right) = \frac{1}{f'(z_0)} \quad (2.38)$$

Beispiel 2.45. Gegeben sei die Funktion $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + 2iz^2}$. Gesucht sind die Residuen von f an allen Singularitäten.

1. Berechne die Nullstellen des Nenners:

$$z^3 + 2iz^2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z_1 = 0}_{\text{zweifach}}, \underbrace{z_2 = -2i}_{\text{einfach}}$$

2. Berechne die Nullstellen des Zählers:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

f hat somit in $z_2 = -2i$ eine einfache Polstelle.

3. Wende die Rechenregeln an:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -2i) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 + 2iz^2} \sin z, -2i\right) = \sin(-2i) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 + 2iz^2}, -2i\right) = -i \sinh(2) \frac{1}{(z^3 + 2iz^2)' \Big|_{z=-2i}} \\ &= -i \sinh(2) \frac{1}{3(-2i)^2 + 4i(-2i)} = \frac{i \sinh(2)}{4} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\sin z}{z^2(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin z}{z}}_{=1} \cdot \frac{1}{0 + 2i} = \underline{\underline{-\frac{i}{2}}}$$

2.4.3.2 Der Residuensatz

Satz 2.46 (Residuensatz). Sei f holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit Ausnahme der isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_m . Ist Γ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve ohne Doppelpunkte, $\Gamma = \partial \tilde{G}$ mit positiver Orientierung, $\tilde{G} \subset G$ und \tilde{G} ein Gebiet mit $z_k \in \tilde{G}$ für $k = 1, \dots, m$. Dann gilt:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k) \quad (2.39)$$

Beweis. Wegen der endlichen Anzahl der Singularitäten von f in \tilde{G} existiert zu z_k ein $r_k > 0$: $U_{r_k}(z_k) \subset \tilde{G}$, $U_{r_k}(z_k) \cap U_{r_j}(z_j) = \emptyset$ für $j \neq k$.

$$\int_{|z-z_k|=r_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k) \quad \text{für } k = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m \int_{|z-z_k|=r_k} f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k)$$

In $\hat{G} := \tilde{G} \setminus \bigcup_{k=1}^m (S_k \cup \overline{U_{r_k}(z_k)})$ (einfach zusammenhängendes Gebiet) ist f holomorph $\Rightarrow \oint_{\partial \hat{G}} f dz = 0$ (Satz 2.16).

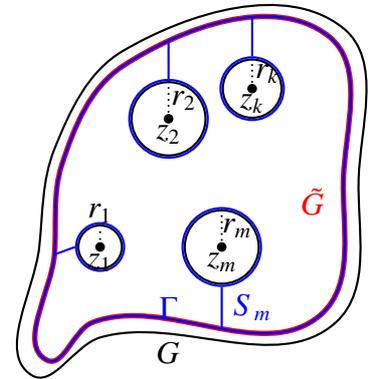


Abb. 2.10: Zum Beweis des Residuensatzes

$$\partial \hat{G} = \Gamma \cup \bigcup_{k=1}^m (S_k \cup (-S_k) \cup (-\partial U_{r_k}(z_k)))$$

$$\Rightarrow 0 = \oint_{\Gamma} f dz + \sum_{k=1}^m \oint_{-\partial U_{r_k}(z_k)} f dz$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} f dz = \sum_{k=1}^m \int_{|z-z_k|=r_k} f dz \quad \square$$

Beispiel 2.47. Berechnung des folgenden Integrals mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\oint_C \frac{z^3}{1+z^4} dz, \quad C = \underbrace{\partial((-2, 2) \times (0, 2))}_{=\tilde{G}}$$

1. Berechne die Singularitäten des Integranden:

(a) Nullstellen von $1+z^4$:

$$1+z^4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i(\pi+2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = z_n := e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

(b) Nullstellen von z^3 :

$$z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \neq z_n$$

\Rightarrow Alle Singularitäten sind einfache Polstellen.

2. Berechne die Residuen:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{1+z^4}, z_n\right) = z_n^3 \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z_n\right) = z_n^3 \frac{1}{(1+z^4)'} \Big|_{z=z_n} = \frac{z_n^3}{4z_n^3} = \frac{1}{4}$$

3. Wende den Residuensatz 2.46 an. Prüfung der Voraussetzungen: $z_0, z_1 \in \tilde{G}$, $z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \tilde{G}$.

$$\oint_C \frac{z^3}{1+z^4} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{1+z^4}, z_0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{1+z^4}, z_1\right) \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \underline{\underline{\pi i}}$$

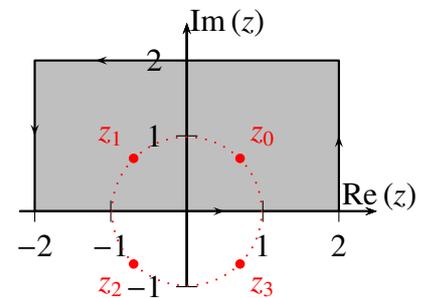


Abb. 2.11: Beispiel 2.47

2.4.3.3 Anwendung: Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen

Satz 2.48. Sei f holomorph in \mathbb{C} mit Ausnahme der isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ für alle $z : |z| \geq r$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}(f, z_k) \quad (2.40)$$

Beweis. 1. Wähle $R > r$ so, dass $z_k \in U_R(0)$. $\mathcal{C}_R := \partial(U_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\})$. Aus Satz 2.46 folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_R} f dz &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}(f, z_k) \\ \oint_{\mathcal{C}_R} f dz &= \underbrace{\int_{-R}^R f(x) dx}_{=: I_1(R)} + \underbrace{\int_0^\pi f(Re^{i\phi}) \frac{dz}{d\phi} d\phi}_{=: I_2(R)}, \quad z \in \partial U_R(0) \Leftrightarrow z = Re^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

2. Grenzübergang $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &= \left| iR \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) e^{i\phi} d\phi \right| \leq R \int_0^\pi \underbrace{|f(Re^{i\phi})|}_{\leq \frac{C}{|Re^{i\phi}|^2}} \underbrace{|e^{i\phi}|}_{=1} d\phi \\ |I_2(R)| &\leq R \frac{C}{R^2} \int_0^\pi d\phi = \frac{\pi C}{R} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

\Rightarrow Es existiert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}(f, z_k) - \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R)}_{=0} \quad \square$$

Bemerkung 2.49. 1. Wegen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ gilt $|u(x, 0)| \leq \frac{C}{|x|^2}$ für $|x| < r$. Damit existiert nach Majorantenkriterium $\int_0^\infty u(x, 0) dx$ und $\int_{-\infty}^0 u(x, 0) dx$ (analog für v).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx \\ \int_0^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} u(x, 0) dx + i \int_0^{\infty} v(x, 0) dx \end{aligned}$$

- Da die Singularitäten z_k mit $\operatorname{Im}(z) < 0$ in der Formel keine Rolle spielen, können in der unteren Halbebene beliebig viele Singularitäten von f liegen.
- Ein analoger Satz gilt bei Integration über den unteren Halbkreis.
- Anstelle der Integration über den Halbkreis kann als Integrationskurve auch eine andere geeignete geschlossene stückweise C^1 -Kurve gewählt werden, zum Beispiel Viertelkreise oder Rechtecke. Dadurch können die Voraussetzungen an f abgeschwächt werden.

5. Die Wachstumsvoraussetzung an f ist insbesondere erfüllt für Integranden vom Typ

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ mit Polynomen } p, q \text{ und Grad } p \leq \text{Grad } q - 2.$$

Beispiel 2.50. Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$. Wähle $f(z) := \frac{1}{1+z^4}$, dann ist $f(x) = \frac{1}{1+x^4} = \text{Re}(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Teste Voraussetzungen an f : f ist holomorph außer in $z = z_n = e^{i(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2})}$, $n = 0, \dots, 3$.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| |z|^2 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|z|^2}{|1+z^4|} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^2 \left| \frac{1}{z^4} + 1 \right|} = 0,$$

das heißt $|f(z)| |z|^2 \leq 1$ für $|z| > r$ mit geeignetem r .

2. Singularitäten von f in der oberen Halbebene sind die einfachen Polstellen z_0 und z_1 .

3. Berechnung der Residuen:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ \text{Res}(f, z_1) &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{9}{4}\pi i} = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)}_{=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} - i \underbrace{\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right) \end{aligned}$$

4. Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i \sum_{n=0, \text{Im}(z_n) > 0}^1 \text{Res}(f, z_n) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) + \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \right) \\ &= -\frac{2\pi i^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Kapitel 3

Partielle Differentialgleichungen

3.1 Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bilden die Untersuchungen eine weitgehend abgeschlossene Theorie. Bei partiellen Differentialgleichungen ist dies wegen der Vielzahl der möglichen Gleichungstypen und verschiedenartigen Lösungsmethoden nicht der Fall. Deshalb beschränken wir uns auf die drei *klassischen Grundgleichungen der mathematischen Physik*:

i) LAPLACE¹-Gleichung oder Potentialgleichung: $\Delta u := \sum_{j=1}^N u_{x_j x_j} = 0$

ii) Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung: $u_t = a^2 \Delta u$, $a = \text{const.}, a > 0$

iii) Wellengleichung: $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $a = \text{const.}, a > 0$

3.1.1 Charakteristische Form und Typeneinteilung

Die drei Grundgleichungen sind alles lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und beschreiben jeweils andersartige physikalische Erscheinungen.

Allgemein heißt

$$L[u] := \underbrace{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{=: H[u] \text{ (Hauptteil)}} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + d(x)$$

linearer partieller Differentialoperator 2. Ordnung und

$$Q_L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) := \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j = \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{A}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi} \quad \text{mit } \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad (3.1)$$

die zugeordnete *charakteristische Form* (oder das *Hauptsymbol*) von L . Hier ist $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ die Koeffizientenmatrix.

Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden in drei Typen klassifiziert.

¹PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827), französischer Mathematiker und Astronom

Definition 3.1 (Typeneinteilung). Sind $\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, \lambda_N(\mathbf{x})$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Dann heißt L in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \text{elliptisch} &\Leftrightarrow \lambda_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ oder } \lambda_i(\mathbf{x}) < 0 \text{ für alle } i, \\ \text{parabolisch} &\Leftrightarrow \lambda_{i^*}(\mathbf{x}) = 0 \text{ für ein } i^*, \\ &\lambda_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ oder } \lambda_i(\mathbf{x}) < 0 \text{ für } i \neq i^*, \\ \text{hyperbolisch} &\Leftrightarrow \lambda_{i^*}(\mathbf{x}) > 0 \text{ für ein } i^*, \\ &\lambda_i(\mathbf{x}) < 0 \text{ für } i \neq i^* \text{ (oder umgekehrt)}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2. 1. Der Typ des Differentialoperators $L[u]$ wird durch seinen *Hauptteil* $H[u]$ bestimmt. $Q_L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ entsteht aus $H[u]$ durch Ersetzung von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ durch ξ_i .

2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ als symmetrisch vorausgesetzt werden. Andernfalls setzen wir $\tilde{a}_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \tilde{a}_{ji}$ und

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^N a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^N a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = H[u] \quad (3.2) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned}$$

3. Für $N = 2$ ist damit die Klassifikation von $L[u]$ vollständig, für $N > 2$ ist dies nicht der Fall.
4. Für $N = 2$ und festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ist $Q(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \text{const}$ die Gleichung für eine Kurve zweiter Ordnung in der ξ_1 - ξ_2 -Ebene (Kegelschnitte). Mit den Vorzeichen der Eigenwerte von $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ergeben sich dabei Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln.

3.1.2 Prototypen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

i) Die LAPLACEgleichung

$$\Delta u = 0 \quad (3.3)$$

beschreibt *stationäre Zustände* physikalischer Prozesse, wie zum Beispiel bei Wärmeleitung, Schwingungen, usw.

$$Q_\Delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = Q_\Delta(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^N \delta_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_N$$

(elliptische Differentialgleichung in N Dimensionen)

ii) Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad t = x_{N+1} \quad (3.4)$$

beschreibt physikalische Ausgleichsprozesse wie zum Beispiel Wärmeausgleich oder Diffusion.

$$Q(\boldsymbol{\xi}) = a^2 Q_\Delta(\boldsymbol{\xi}) - 0 = a^2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a^2 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(parabolische Differentialgleichung in $N + 1$ Dimensionen)

iii) Die Wellengleichung

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t = x_{N+1} \quad (3.5)$$

beschreibt physikalische Schwingungsvorgänge. Zum Beispiel ist sie für $N = 1$ die Differentialgleichung einer schwingenden Saite ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$), wobei u die Auslenkung der Saite beschreibt. Für $N = 2, 3$ werden Schwingungen zum Beispiel elektromagnetischer Wellen oder Schallwellen dargestellt.

$$Q(\xi) = a^2 Q_\Delta(\xi) - \xi_{N+1}^2 = a^2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - \xi_{N+1}^2, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a^2 \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

(hyperbolische Differentialgleichung in $N + 1$ Dimensionen)

$$\text{Ersetze: } \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \xi_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \xi_{N+1}$$

Bemerkung 3.3. Im Spezialfall konstanter Koeffizienten im Hauptteil, das heißt $a_{ij} = \text{const.}$, lässt sich $H[u]$ mittels Hauptachsentransformation der konstanten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ auf Normalform transformieren, und zwar so, dass bei dem entsprechenden Typ eine der drei Prototypen entsteht.

3.2 Die Laplacegleichung

3.2.1 Haupteigenschaften harmonischer Funktionen

Definition 3.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet. Lösungen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ der LAPLACEgleichung (3.3) heißen *harmonische Funktionen* oder *Potentialfunktionen*.

Die wichtigsten Eigenschaften harmonischer Funktionen sind:

1. Jede harmonische Funktion ist in Ω beliebig oft differenzierbar ($u \in C^\infty(\Omega)$).
2. Für eine in Ω harmonische Funktion u gilt die *Mittelwertformel*

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\partial U_r(\mathbf{x})|} \int_{\partial U_r(\mathbf{x})} u \, d\sigma} \quad (3.6)$$

falls $U_r(\mathbf{x}) \subset \Omega$.

3. *Maximum-Minimum-Prinzip*: Besitzt eine harmonische Funktion u im Inneren von Ω ein Maximum (oder Minimum), so ist u konstant in Ω .

Bemerkung 3.5. Für $N = 2$ besteht ein enger Zusammenhang zur Funktionentheorie, Beweise dieser Eigenschaften s. Übungsaufgabe 52.

3.2.2 Fundamentallösungen

Haupteigenschaft des LAPLACEoperators ist die *Rotations- und Translationsinvarianz*, das heißt bei einer Koordinatentransformation $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ mit einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ und einer orthogonalen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_N$) bleibt die Gestalt des LAPLACEoperators unverändert, das heißt $\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}u = \Delta_{\mathbf{x}}u$. Rotationssymmetrische Lösungen von $\Delta u = 0$, das heißt $u(\mathbf{x}) = \phi(r)$, $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ für $r > 0$, sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \phi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = \phi'(r) \frac{x_i}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\phi'(r)}{r} \right) + \frac{\phi'(r)}{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\phi'(r)}{r} \right) \frac{x_i^2}{r} + \frac{\phi'(r)}{r}, \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\phi'}{r} \right)' \frac{x_i^2}{r} + \frac{\phi'}{r} \right) = \left(\frac{\phi'}{r} \right)' \frac{r^2}{r} + N \frac{\phi'}{r} = r^{1-N} \left(\left(\frac{\phi'}{r} \right)' r^N + (r^N)' \frac{\phi'}{r} \right) = r^{1-N} (r^{N-1} \phi')'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \Delta u = 0 &\Leftrightarrow (r^{N-1} \phi')' = 0 \Leftrightarrow \phi' = cr^{1-N}, \\ \Rightarrow \phi(r) &= \begin{cases} C_1 \ln r + C_2 & \text{für } N = 2 \\ C_1 \frac{1}{r^{N-2}} + C_2 & \text{für } N \geq 3 \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ reelle Konstanten}). \end{aligned}$$

Nutzt man die Translationsinvarianz, so erhält man bei geeigneter Wahl von C_1 und C_2

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| & \text{für } N = 2 \\ \frac{1}{(N-2)\omega_N \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{N-2}} & \text{für } N \geq 3. \end{cases} \quad (3.7)$$

Dabei ist ω_N der Oberflächeninhalt der Einheitskugel $\partial U_1(0) \subset \mathbb{R}^N$. Speziell ergibt sich für $N = 3$:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad \text{COULOMBpotential bzw. NEWTONSches Gravitationspotential}$$

Man nennt im Allgemeinen die Funktion $S = S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die *Singularitätenfunktion, Grundlösung* oder *Fundamentallösung* des LAPLACEoperators Δ mit Pol in \mathbf{y} . Für festes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\Delta_{\mathbf{x}} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{y}\}$$

Weiterhin ist

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (\text{Symmetrie von } S).$$

Mit Hilfe der 2. GREENSchen Formel gelingt die Herleitung einer *Darstellungsformel für harmonische Funktionen*: Sei u harmonisch in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dann gilt:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial S(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \right) d\sigma_y \quad (3.8)$$

Bemerkung 3.6. Mit Hilfe der Grundlösung (3.7) lässt sich gemäß (3.8) der Wert einer harmonischen Funktion im Inneren von Ω durch ihre Randwerte $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ und u bestimmen.

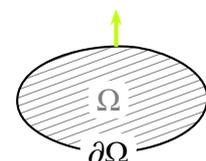


Abb. 3.1: Darstellungsformel

3.2.3 Das Dirichletproblem

Eine typische Problemstellung ist das DIRICHLET^{II}-*Problem* oder die 1. *Randwertaufgabe*:

Gegeben sei $g \in \partial\Omega$. Gesucht ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, so dass gilt

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

Bemerkung 3.7. a) Aus dem Minimum-Maximum-Prinzip ergibt sich die Eindeutigkeit einer Lösung von (3.9) in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, denn die Differenz $u_1 - u_2$ zweier Lösungen von (3.9) ist wieder harmonisch. Außerdem gilt auf $\partial\Omega$: $u_1 - u_2 = g - g = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \equiv 0$.^{III}

b) Neben dem DIRICHLET-Problem gibt es noch das NEUMANN-*Problem* oder die 2. *Randwertaufgabe*:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Die Lösung ist hier eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante. Weiterhin untersucht man auch verschiedene gemischte Randwertaufgaben (3. *Randwertaufgaben*).

Beispiel 3.8. Gesucht ist die stationäre Temperaturverteilung in $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, wobei auf $\partial\Omega$ die Temperatur u vorgeschrieben ist:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 & u(x, 0) &= x \\ u(x, 1) &= 0 & u(1, y) &= 1 - y \end{aligned} \quad x, y \in [0, 1]$$

Ansatz für die Lösung:

$$u(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Im Gebiet Ω ist

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 2A + 2C = 0 \Rightarrow A = -C \\ u(x, 0) &= Ax^2 + Dx + F = x \Rightarrow A = 0, D = 1, F = 0 \\ &\Rightarrow u = Bxy + x + Ey \\ u(x, 1) &= Bx + x + E = 0 \Rightarrow B = -1, E = 0 \\ &\Rightarrow \underline{u = x - xy} \end{aligned}$$

Alle Randbedingungen sind erfüllt.

Allgemein gibt es unter anderem folgende Lösungsmöglichkeiten für das DIRICHLET-Problem:

1. *Ansatzmethode*: Siehe Beispiel 3.8

^{II}JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859), deutscher Mathematiker

^{III}s.a. Übungsaufgabe 52.d)

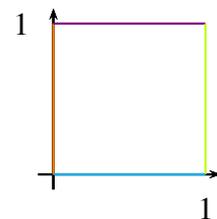


Abb. 3.2: Beispiel 3.8

2. *Explizite Lösungsformel:* Dazu benutzt man die Darstellungsformel (3.8) für eine Lösung u von (3.9). Diese bleibt auch dann richtig, wenn S ersetzt wird durch

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{mit } \Delta_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

Geeignete Wahl von v liefert die GREENSche Funktion Γ :

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} \in \partial\Omega$$

$$\Rightarrow u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} d\sigma_{\mathbf{y}}$$

Wie findet man Γ beziehungsweise v ? Für spezielle Gebiete Ω lässt sich Γ durch Spiegelung an $\partial\Omega$ konstruieren, zum Beispiel für den Halbraum, die Kugel oder den Kreis.

Beispiel 3.9. Lösung des DIRICHLET-Problems für den Einheitskreis $U_1(0)$ in der Ebene:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos \theta, \sin \theta) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta,$$

wobei $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in U_1(0)$ ist. Dies ist die POISSONSche^{IV} Integralformel (Beweis s. Übungsaufgabe 53).

3.3 Die Wärmeleitungsgleichung

3.3.1 Lösung des Anfangswertproblems

Das Anfangswertproblem zur Wärmeleitungsgleichung besteht darin, eine Lösung $u = u(\mathbf{x}, t)$ zu finden mit

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad a > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad f \text{ gegebene Funktion} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Zunächst betrachten wir das Anfangswertproblem für $N = 1$, welches physikalisch interpretierbar ist als Beschreibung der Temperaturverteilung in einem geradlinigem unendlichen Draht. Lösung des Anfangswertproblems:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.12)$$

Die formale Lösung erfolgt mittels FOURIERtransformation der Funktion u als Lösung des Anfangswertproblems bezüglich der Raumvariable x .

Definition 3.10 (FOURIERtransformation der Funktion f).

$$\hat{f}(\xi) = F[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (3.13)$$

Wichtige Eigenschaften der FOURIERtransformation:

^{IV} SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840), französischer Physiker und Mathematiker

i) *Inversionsformel*: Mit obigem \hat{f} gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi =: F^{-1}[\hat{f}](x) = F[\hat{f}](-x)$$

(inverse FOURIERtransformation)

ii) $F[f'](\xi) = i\xi F[f](\xi)$ (Algebraisierung der Differentiation)

denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx &= f(x) e^{-ix\xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ix\xi}) dx && \text{(partielle Integration)} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} i\xi f(x) e^{-ix\xi} dx \end{aligned}$$

falls $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ist.

Anwendung: Setze für festes $\xi \in \mathbb{R}$: $\hat{u}(t) := F[u(\cdot, t)](\xi)$.

$$\hat{u}'(t) = F[u_t(\cdot, t)](\xi) = F[a^2 u_{xx}(\cdot, t)](\xi) \stackrel{\text{ii)}}{=} a^2 i\xi F[u_x(\cdot, t)](\xi) \stackrel{\text{ii)}}{=} a^2 (i\xi)^2 F[u(\cdot, t)](\xi) = -a^2 \xi^2 \hat{u}(t),$$

das heißt \hat{u} ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \hat{u}'(t) &= -a^2 \xi^2 \hat{u}(t) \\ \text{aus Anfangswert (3.12)} \quad \hat{u}(0) &= F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) \end{aligned} \quad \boxed{\Rightarrow \hat{u}(t) = \hat{f}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}}$$

Mit i) folgt:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1}[\hat{u}(t)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y-x)\xi - a^2 \xi^2 t} d\xi}_{\text{}} \right) dy \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{4a^2 t} \right\} \end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt mittels des CAUCHYSCHEN Integralsatzes 2.16 durch Integration über ein Rechteck. Es folgt daraus

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{4a^2 t} \right\} dy}$$

3.3.2 Eigenschaften der Lösung des Anfangswertproblems

Satz 3.11. Sei $f(x)$ eine stetige und beschränkte Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, t) f(y) dy, \quad K(x, y, t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{4a^2 t} \right\}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems zur Wärmeleitungsgleichung für $N = 1$. Genauer ist u für $t > 0$ unendlich oft differenzierbar, genügt der Differentialgleichung (3.11) und

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = f(x_0) \quad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.12. 1. $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)f(y) dy$ heißt *POISSONSches Integral* und ist für jedes $t > 0$ ein uneigentliches Integral, das absolut konvergiert. Ebenfalls gilt dies für alle Ableitungen nach x und t (Vertauschung von Integration und Differentiation erlaubt).

2. Der Beweis ergibt sich durch Eigenschaften des *Wärmeleitungskerns* K (siehe zum Beispiel COURANT/HILBERT, Seite 156 ff.)

(a) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$

(b) $K(x,y,t) > 0, K(x,y,t) = K(y,x,t)$

(c) Für festes $y \in \mathbb{R}$ genügt K der Wärmeleitungsgleichung $K_t = a^2 K_{xx}$.

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) dy = 1 \Rightarrow K$ ist die Dichte der Normalverteilung („Gaussische Glockenkurve“) mit Mittelwert $\mu = y$ und Streuung $\sigma, \sigma^2 = 2a^2t$.

3. Für $N > 1$ lautet die analoge Lösung u des Anfangswertproblems

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

mit Kern

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^N \exp\left\{ \frac{-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4a^2t} \right\}$$

Abgeleitete Eigenschaften:

- In der Lösung ist eine „Zeitumkehr“, das heißt das Ersetzen von t durch $-t$ anders als bei der Wellengleichung nicht möglich. Deshalb beschreibt die Wärmeleitungsgleichung beziehungsweise deren Lösung irreversible Prozesse.
- Alle Werte von f beeinflussen zu jeder Zeit $t > 0$ und jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Werte $u(x,t)$ der Lösung. Anders als bei der Wellengleichung hat man hier eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen in den Anfangsdaten.
- Sofortiger Glättungseffekt: Auch wenn f nur stetig und beschränkt ist, ist u für jedes $t > 0$ unendlich oft differenzierbar.
- Wegen $K(x,y,t) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}, t > 0$ gilt

$$\inf_{\mathbb{R}} f K(x,y,t) \leq K(x,y,t) f(y) \leq \sup_{\mathbb{R}} f K(x,y,t) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Integration bezüglich y liefert

$$\inf_{\mathbb{R}} f \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) f(y) dy \leq \sup_{\mathbb{R}} f \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) dy}_{= 1}$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f \leq u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}} f$$

(*Minimum-Maximum-Eigenschaft* der Lösung). Die Ungleichung zeigt, dass die Werte der Lösung durch die Anfangsdaten kontrollierbar ist.

3.4 Wellengleichung

3.4.1 Allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Gesucht ist die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (3.14)$$

Durchführung einer Koordinatentransformation: Wir suchen neue Koordinaten \tilde{x}, \tilde{t} , so dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) f = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) f = \frac{\partial f}{\partial \tilde{t}}$$

für beliebiges $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tilde{x}}$ muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} &= -a & \frac{\partial t}{\partial \tilde{x}} &= 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{t}} &= a & \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} &= 1 \\ \Rightarrow x &= a(\tilde{t} - \tilde{x}) & t &= \tilde{x} + \tilde{t} \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{1}{2a}(at + x) \\ \tilde{x} &= \frac{1}{2a}(at - x) \end{aligned} \right\} & & \text{(charakteristische Koordinaten der Wellengleichung)} \end{aligned}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \Leftrightarrow u_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(h) = 0 \quad \text{mit } h = \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}}$$

$$h(\tilde{x}, \tilde{t}) = F(\tilde{t}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = F(\tilde{t})$$

$$\Rightarrow u(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{\phi}(\tilde{t}) + \tilde{\psi}(\tilde{x}) \quad \text{mit } \tilde{\phi}(\tilde{t}) = \int F(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \tilde{\phi}\left(\frac{1}{2a}(at + x)\right) + \tilde{\psi}\left(\frac{1}{2a}(at - x)\right)$$

$$= \phi(at + x) + \psi(at - x) \quad \text{mit } \phi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$$

Durch Einsetzen erfolgt eine Probe der Gültigkeit der Lösung. Die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung lautet also

$$\boxed{u(x, y) = \phi(at + x) + \psi(at - x)} \quad (3.15)$$

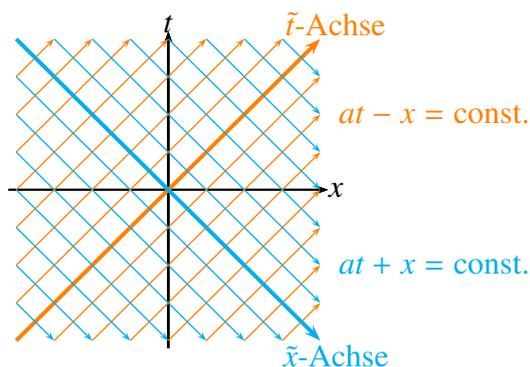


Abb. 3.3: Lösungsprinzip

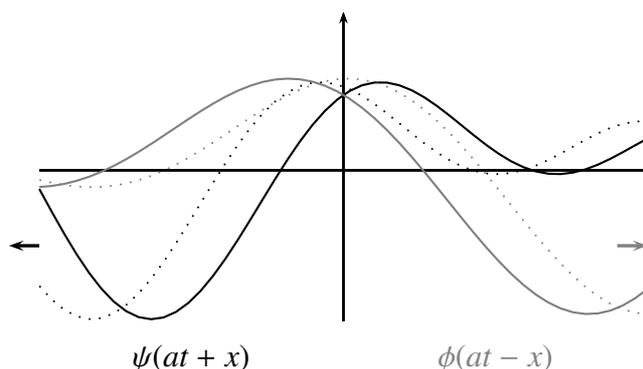


Abb. 3.4: Superposition

u kann als Superposition zweier Wellen interpretiert werden. Die Wellen haben die gleiche Form zu verschiedenen Zeiten und breiten sich in entgegengesetzte Richtungen mit der Geschwindigkeit a beziehungsweise $-a$ aus.

3.4.2 Lösungsformel von d'Alembert

Das Anfangswertproblem oder CAUCHYproblem zur Wellengleichung (3.14) mit den Anfangswerten $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und gegebene Funktionen f, g wird gelöst, indem man ϕ und ψ in (3.15) aus f und g bestimmt:

$$t = 0 : \quad \psi(-x) + \phi(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (3.16)$$

$$a\psi'(-x) + a\phi'(x) = u_t(x, 0) = g(x) \quad (3.17)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Differentiation von (3.16) nach x :

$$-\psi'(-x) + \phi'(x) = f'(x) \quad \text{zusammen mit (3.17)}$$

$$\Rightarrow \psi'(-x) = \frac{g(x) - af'(x)}{2a}$$

$$\phi'(x) = \frac{g(x) + af'(x)}{2a}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x (g(\xi) + af'(\xi)) \, d\xi + c_1$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^x g(\xi) \, d\xi + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(0) + c_1$$

$$\psi'(x) = \frac{g(-x) - af'(-x)}{2a}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = -\frac{1}{2a} \int_0^{-x} g(\xi) \, d\xi + \frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}f(0) + c_2$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \phi(at + x) + \psi(at - x) = \boxed{\frac{1}{2}(f(at + x) + f(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) \, d\xi} \quad (3.18)$$

Gleichung (3.18) ist die *Lösungsformel von d'ALEMBERT*^V

Folgerung 3.13 (Folgerungen aus der Lösungsformel). 1. Um den Wert von u im Punkt (x, t) zu bestimmen, sind nur die Werte der Anfangsdaten f und g in $[x - at, x + at]$ nötig. Das

^VJEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783), französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph

Intervall $A(x_0, t_0) = [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ heißt *Abhängigkeitsbereich* des Punktes (x_0, t_0) und wird durch die beiden Charakteristiken durch x_0, t_0 herausgeschnitten.

- Sei jetzt in x_0 eine „Störung“ oder „Signal“ gegeben. Der Beobachter sitzt in $x_1 \neq x_0$. Er bekommt für $0 \leq t \leq t_1$ nichts vom Signal mit. Dies geschieht erst für $t \geq t_1$.

$$t_1 = \frac{x_1 - x_0}{a} \tag{3.19}$$

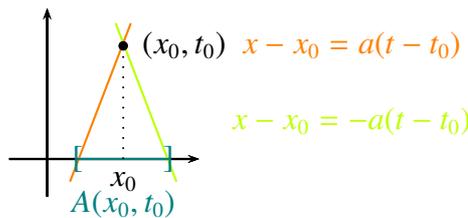


Abb. 3.5: Abhängigkeitsbereich

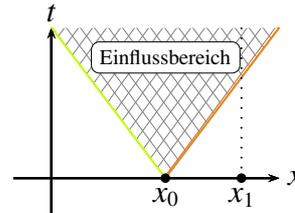


Abb. 3.6: Einflussbereich

3.4.3 Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung

Wir betrachten das Problem der eingespannten *endlichen* Saite der Länge π . Zusätzlich ist die Auslenkung an beiden Enden der Saite Null. Das heißt wir suchen eine Lösung $u \in C^2(S) \cap C^1(\bar{S})$ des *Anfangsrandwertproblems*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{in } (0, \pi) \times (0, \infty) =: S$$

Randwerte: $u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

Anfangswerte: $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$

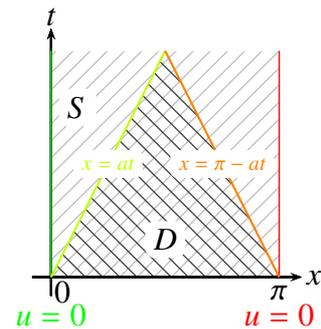


Abb. 3.7: Anfangsrandwertproblem

Wegen $u \in C^1(\bar{S})$ müssen sogenannte *Kompatibilitätsbedingungen* (oder *Verträglichkeitsbedingungen*) für die gegebenen Werte erfüllt sein:

$$f(0) = u(0, 0) = 0, \quad f(\pi) = u(\pi, 0) = 0.$$

Aus den gegebenen Randwerten folgt weiter $0 = u_t(0, 0) = g(0), 0 = u_t(\pi, 0) = g(\pi)$.

Das Anfangsrandwertproblem wird in S mittels der *FOURIERMethode* gelöst.

1. Schritt: *Separationsansatz*.

$$\boxed{u(x, t) = v(x)w(t)}, \quad u_{tt} = v(x)\ddot{w}(t), \quad u_{xx} = v''(x)w(t) \tag{3.20}$$

Einsetzen in die Wellengleichung (3.5) liefert

$$\ddot{w}(t)v(x) = a^2 v''(x)w(t) \Rightarrow \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = a^2 \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Es existiert somit eine Konstante γ , so dass

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \gamma a^2, \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = \gamma$$

Das heißt, v genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0$$

und w genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\ddot{w}(t) + a^2 \lambda w(t) = 0 \quad (3.21)$$

mit $\lambda = -\gamma$. Da $w \neq 0$ sein soll (denn wir suchen *nichttriviale* Lösungen u), muss $v(0) = v(\pi) = 0$ sein, das heißt v ist die Lösung des Randwertproblems

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0 \quad (3.22)$$

in $[0, \pi]$. Das Randwertproblem (3.22) hat nur dann eine nichttriviale Lösung v , wenn $\lambda > 0$ ist.

Folgerung 3.14. (3.22) hat nur nichttriviale Lösungen für spezielle $\lambda = \lambda_n := n^2$, $n \in \mathbb{N}$, und zwar $v_n(x) := \sin(nx)$, denn die allgemeine Lösung von $v'' + \lambda v = 0$ für $\lambda > 0$ ist $v = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Aus den Randwerten folgt dann

$$0 = v(0) = c_1 \cos(0) + 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$0 = v(\pi) = 0 + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = n^2$$

Bemerkung 3.15. (3.22) ist ein *Eigenwertproblem* für v mit Randwerten $v(0) = v(\pi) = 0$. Die $\lambda_n = n^2$ heißen *Eigenwerte* und v_n *Eigenfunktionen* des Randwertproblems.

Noch offen ist die Lösung der Differentialgleichung (3.21) für w :

$$\ddot{w} + a^2 n^2 = 0 \Rightarrow w_n = A_n \cos(ant) + B_n \sin(ant)$$

Die Gesamtlösung (3.20) ergibt sich dann mit

$$u_n(x, t) = w_n(t)v_n(x) = (A_n \cos(ant) + B_n \sin(ant)) \sin(nx) \quad (3.23)$$

bei noch zu wählenden Konstanten $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Jede Funktion u_n ist Lösung der Wellengleichung und heißt *n-te Oberschwingung* beziehungsweise *Grundschiwingung* für $n = 1$. Jede Überlagerung von Oberschwingungen ist wieder Lösung der Wellengleichung (Superpositionsprinzip) und genügt den Randbedingungen. Es bleibt die Frage nach der Erfüllung der Anfangsbedingungen.

2. Schritt: Reihenansatz. Die Lösung u des Anfangsrandwertproblems wird als eine FOURIERREIHE dargestellt:

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(ant) + B_n \sin(ant)) \sin(nx) \quad (3.24)$$

Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n aus den Anfangswerten:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx), \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n an \underbrace{\cos(an \cdot 0)}_{= 1} \sin(nx)$$

Das heißt, A_n und B_n müssen Koeffizienten der Sinusreihe von f beziehungsweise g sein. Im Detail:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} an B_n \sin(nx) \end{aligned} \right\} \text{für } x \in (0, \pi)$$

Wir wählen die ungerade Fortsetzung von f beziehungsweise g auf $(-\pi, 0)$, das heißt $f(x) = -f(-x)$ beziehungsweise $g(x) = -g(-x)$ für $x \in (-\pi, 0)$ und $f(0) = g(0) = 0$. Aus der Theorie der FOURIERREIHEN erhält man

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) \, dx \quad (3.25)$$

Bemerkung 3.16. (3.24) mit (3.25) ist zunächst nur eine formale Lösung des Randwertproblems. Sie ist eine Lösung aus $C^2(S) \cap C^1(\overline{S})$, falls alle Differentiationen in (3.24) *gliedweise* ausgeführt werden dürfen. Mittels Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz ist dies möglich, falls $|A_n| \leq \frac{c}{n^2}$ und $|B_n| \leq \frac{c}{n^3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer reellen Konstanten $c > 0$ ist. Diese Bedingungen an A_n und B_n lassen sich explizit an f und g erfüllen.

Die Eindeutigkeit der Lösung kann mittels der *Energieintegralmethode*^{VI} gezeigt werden:

$$E[u](t) := \frac{1}{2} \int (u_t^2 + a^2 u_x^2) \, dx \quad (\text{Energieintegral von } u) \quad (3.26)$$

Satz 3.17. Für eine Lösung $u \in C^2(S) \cap C^1(\overline{S})$ des Randwertproblems ist $E[u]$ eine Erhaltungsgröße, das heißt

$$E[u](t) = E[u](0) \quad \forall t \geq 0$$

Beweis.

$$\frac{d}{dt}(E[u](t)) \stackrel{(3.26)}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + a^2 u_x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}) \, dx$$

Umformung durch partielle Integration:

$$\int_0^\pi u_x (u_t)_x \, dx = \underbrace{u_x u_t \Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi u_{xx} u_t \, dx \Rightarrow \frac{d}{dt}(E[u](t)) = \int_0^\pi u_t \underbrace{(u_{tt} - a^2 u_{xx})}_{=0} \, dx = 0$$

wegen Wellengleichung (3.14). □

Folgerung 3.18. Die Lösung $u \in C^2(S) \cap C^1(\overline{S})$ des Anfangsrandwertproblems ist eindeutig, denn sei $w := u_1 - u_2$ mit $u_j \in C^2 \cap C^1(\overline{S})$ Lösung des Anfangsrandwertproblems, so löst w das Anfangsrandwertproblem mit den Anfangswerten $w(x, 0) = 0$, $w_t(x, 0) = 0$ für $t \in (0, \pi)$. Damit ergibt sich für das Energieintegral

$$\begin{aligned} E[w](0) = 0 &\Rightarrow E[w](t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2} \int_0^\pi (w_t^2 + a^2 w_x^2) \, dx &= 0 \Rightarrow w_t^2 = w_x^2 = 0 \quad \forall (x, t) \in S \\ &\Rightarrow w = \text{const. in } S, \text{ mit Anfangswerten folgt } w \equiv 0. \end{aligned}$$

^{VI}anwendbar bei den meisten hyperbolischen Problemen

3.4.4 Wellengleichung in höheren Dimensionen

Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u && \text{in } \mathbb{R}^{N+1} \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}) \\ u_t(\mathbf{x}, 0) &= g(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

Lösungsformel für $N = 1$:

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy \quad \text{Formel von D'ALEMBERT}$$

Lösungsformel für $N = 2$ ($K_{at}(\mathbf{x})$ ist die Kreisfläche um $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit Radius at):

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y})}{\sqrt{a^2 t^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}(\mathbf{x})} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{a^2 t^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}} dy \quad \text{Formel von POISSON}$$

Lösungsformel für $N = 3$:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial U_{at}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial U_{at}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \quad \text{Formel von KIRCHHOFF}$$

Vergleich der Störungsausbreitung bei Wellen in den verschiedenen Raumdimensionen:

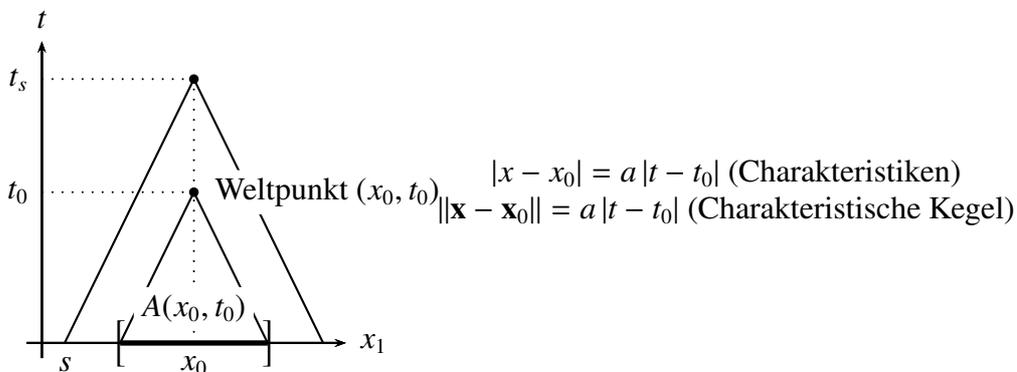


Abb. 3.8: „Schnittbild“ in der x_1 - t -Ebene

$$\begin{aligned} N = 1 : \quad A(x_0, t_0) &= [x_0 - at_0, x_0 + at_0] \\ \text{Abhängigkeitsbereich:} \quad N = 2 : \quad A(\mathbf{x}_0, t_0) &= K_{at_0}(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq at_0 \} \\ N = 3 : \quad A(\mathbf{x}_0, t_0) &= \partial U_{at_0}(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = at_0 \} \end{aligned}$$

Liege jetzt zur Zeit $t = 0$ in s eine „Störung“ der Ruhe vor. In allen Raumdimensionen herrscht im Punkt \mathbf{x}_0 Ruhe für $t < t_s$. Für $t = t_s$ ist die Störung bemerkbar mit $t_s = \frac{1}{a} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{s}\|$, da $\mathbf{s} \in A(\mathbf{x}_0, t_s)$ ist. Für $t > t_s$ bei $N = 1, 2$ ist auch $\mathbf{s} \in A(\mathbf{x}_0, t)$, das heißt die Störung klingt nicht ab. Bei $N = 3$ ist dagegen $\mathbf{s} \notin A(\mathbf{x}_0, t)$, das heißt die Störung klingt ab. Im \mathbb{R}^3 gilt das HUYGENSSCHE^{VII} Prinzip (in der starken Form), im \mathbb{R}^1 und \mathbb{R}^2 dagegen nicht.

^{VII}CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695), niederländischer Mathematiker, Astronom und Physiker