Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (13. Serie)

Abgabetermin: 03.02.2020

49. Skizziere die nachfolgenden Mengen und bestimme alle deren Häufungspunkte:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \;,\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \;, \\
&\text{b)} \quad \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; x = \frac{1}{n} + \frac{i}{m} \;,\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \;, \\
&\text{c)} \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4 < x_1^2 + x_2^2 < 9 \right\} \;, \\
&\text{d)} \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = ((-1)^n, 0, \alpha) \;,\; n \in \mathbb{N} \;,\; \alpha \in (-1, 1] \right\} \;.
\end{aligned}
$$

50. In der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei $a_n = c_n - c_{n-1}$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Zeige durch Berechnung der Partialsummen die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und bestimme die Summe dieser Reihe. Wende diese Überlegung auf die folgenden Reihen an:

$$
\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \;, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \;.
$$

51. a) Es sei $a > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Zeige die Konvergenz der Reihe

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{(4+a^2)^{k+1}}
$$

und bestimme deren Summe.

b) Beweise das *Quotientenkriterium* (in Grenzwertfassung):

Konvergiert die Zahlenfolge $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$ und ist

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, so divergiert die Reihe $\sum a_n$.

52. a) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + n} \;, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \, n!}{n^n} \;, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} - (-1)^n}{n^2} \;.
$$

b) Untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} - 1 \right)$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Berechne deren Summe auf $\frac{1}{1000}$ genau.
(*Hinweis*: Fehlerabschätzung für alternierende Reihen)