Vorlesung Mathematik für Physiker — Hans-Peter Gittel
Analysis 1 — Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 — Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (12. Serie)

Abgabetermin: 27.01.2020

45. Berechne die Grenzwerte der Zahlenfolgen (a_n) mit

a) $a_n = \sqrt{9n^2+4n+17} - \sqrt{9n^2-5}$, b) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{2n-2}$,

c) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

46. a) Beweise die Produktregel für bestimmt divergente Zahlenfolgen:
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty \ , \quad \lim_{n\to\infty} a_n c_n = \infty \ (= -\infty) \ , \text{ falls } c>0 \ (c<0).$$

b) Zeige, dass für bestimmt divergente Zahlenfolgen die Quotientenregel i.A. nicht gilt. Gib jeweils ein Beispiel zweier Zahlenfolgen (a_n) , (b_n) an, für die $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ ist, jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 10 \ .$$

47. a) Die Konvergenz einer komplexen Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $a \in \mathbb{C}$ wird definiert durch die Bedingungen:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a.$$

Zeige, dass dies äquivalent ist zu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

b) Sei (a_n) eine komplexe Zahlenfolge mit der Eigenschaft:

$$|a_n| \le \left(1-\tfrac{1}{n}\right)|a_{n-1}| \quad \text{für alle} \quad n > n_1$$

mit einem festen $n_1 \in \mathbb{N}$. Beweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

48. Untersuche auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die eigentlichen und uneigentlichen Grenzwerte bzw. Häufungswerte für die Folgen (a_n) mit

a) $a_n = \dfrac{8^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n}$, b) $a_n = \dfrac{3n^2 i - 7n^3 + 1}{n^3 + 5ni + 8i - 2}$,

c) $a_n = (1+(-1)^n)\, n$, d) $a_n = \dfrac{2^n}{5} - \left[\dfrac{2^n}{5}\right]$.

($[x]$ ist wieder der größte ganze Anteil von $x \in \mathbb{R}$.)