Vorlesung Mathematik für Physiker — Hans-Peter Gittel
Analysis 1 — Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 — Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (11. Serie)

Abgabetermin: 20.01.2020

41. a) Zeige, dass die Zahlenfolgen (a_n) gegen einen Wert a konvergieren, und gib die zugehörige $\varepsilon - n_0-$Abschätzung an:

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+2n+2}\ , \qquad a_n = \frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\ .$$

b) Bestimme zu $\varepsilon = 10^{-k}; k = 1,2,3$ für jede der beiden Folgen das zugehörige $n_0(\varepsilon)$ und gib die tatsächliche Abweichung des Folgengliedes a_n mit $n = n_0 + 10$ vom jeweiligen Grenzwert a an.

42. Berechne die Grenzwerte der Zahlenfolgen (a_n) mit

a) $a_n = \dfrac{5n^3+4n-34}{6n^3-n^2+9n}$, b) $a_n = \left(\dfrac{-1}{n}\right)^n$,

c) $a_n = \dfrac{1^3}{n^4} + \dfrac{2^3}{n^4} + \ldots + \dfrac{n^3}{n^4}$, d) $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$.

43. a) Beweise den Vergleichsatz für Zahlenfolgen:
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $a_n \le b_n$ *für alle* $n \ge n_1$. *Dann gilt* $a \le b$.
b) Gib ein Beispiel zweier Zahlenfolgen (a_n) , (b_n) an, wobei $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ist.
c) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeige, dass die Zahlenfolge $\left(\sqrt[k]{a_n}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$ gegen 0 konvergiert.
Gilt diese Aussage auch für $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

44. Es werde eine Zahlenfolge (a_n) rekursiv definiert durch die Vorschrift

$$a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = \tfrac{1}{4}a_n^2 + \tfrac{1}{2}a_n \quad \text{für} \quad n = 1,2,3,\ldots\ .$$

Zeige deren Konvergenz mittels Monotoniekriterium und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
(*Hinweis*: Nachweis der Monotonie und Beschränktheit von (a_n) mittels vollständiger Induktion)