Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (8. Serie)

Abgabetermin: 16.12.2019

29. a) Bestimme alle reellen Lösungen des folgenden homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}$$

b) Konstruiere durch Abändern der rechten Seiten ein inhomogenes System, welches lösbar ist. Gib für diesen Fall den Lösungsraum dieses Systems an. Können dabei die rechten Seiten so gewählt werden, dass das inhomogene System eindeutig lösbar ist?
c) Durch eine Abänderung der rechten Seiten ist ein nichtlösbares inhomogenes System herzustellen.

30. Bestimme alle reellen Lösungen sowie die Dimension der Lösungsmenge für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

31. Zeige für eine quadratische Matrix A die Äquivalenz der drei Aussagen:

a) A ist regulär.

b) Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ hat höchstens eine Lösung.

c) Das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jede rechte Seite b lösbar.

Sei A eine reguläre quadratische Matrix. Benutze obige Aussagen zum Nachweis, dass beim Gaußschen Algorithmus zum Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$ keine Spaltenvertauschungen notwendig sind.

32. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $f(p) = \int_0^2 p(x)\, dx$. Hier bezeichnet $\mathcal{P}_3$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 3 (s. Übungsaufgabe 12.a)

a) Untersuche f auf Linearität.

b) Bestimme Bild(f) und eine Basis von Kern(f).

c) Was ist die Darstellungsmatrix von f bez. der Basen $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ von $\mathcal{P}_3$ bzw. $C = \{1\}$ von $\mathbb{R}$.