Vorlesung Mathematik für Physiker | Hans-Peter Gittel
Lineare Algebra 1 | Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 | Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (7. Serie)

Abgabetermin: 09.12.2019

25. a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 \\ 2\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$. Bestimme alle 2×2-Matrizen B, die mit der Matrix A vertauschbar sind, d.h., für die gilt: $AB = BA$.

b) Berechne A^{-1}.

26. Gegeben seien die Abbildungen $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ durch

$$f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}, \quad f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne die Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f_1(x) = A_1 x$ und $f_2(x) = A_2 x$.

b) Bestimme $f_2 \circ f_1$ und $A_2 A_1$.

c) Bestimme $3f_1 - 2f_2 + f_1 \circ f_2$.

27. a) Beweise: $\mathrm{Rang}(AB) \leq \mathrm{Rang}(A)$.
(*Hinweis*: Betrachte die Bildräume der zugehörigen Abbildungen f_{AB} und f_A.)

b) Gilt auch $\mathrm{Rang}(AB) \leq \mathrm{Rang}(B)$?
Begründe die Antwort.

c) Bestimme $\mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (1, -1, 2)$, $b_2 = (2, 3, 7)$, $b_3 = (2, 3, 6)$ sowie $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ mit $c_1 = (1, 1, 2)$, $c_2 = (-1, 3, 3)$, $c_3 = (-2, 7, 6)$ gegeben. Bestimme die Koordinaten (y_1, y_2, y_3) des Vektors $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3$ bez. der Basis C.