Vorlesung Mathematik für Physiker | Hans-Peter Gittel
Lineare Algebra 1 | Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 | Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (5. Serie)

Abgabetermin: 25.11.2019

17. a) Ergänze die Vektoren $(1, \mathrm{i}, 1)$ und $(1, 2\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})$ zu einer Basis des $\mathbb{C}^3$.

b) Bilden die Vektoren $(1, 2, 3)$, $(2, \mathrm{i}, 0)$, $(-1, 2 - \mathrm{i}, 3)$, $(1 - \mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i}, 3 + 3\mathrm{i})$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}^3$?

18. Untersuche, welche der folgenden $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$ lineare Abbildungen sind?

a) $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, 2x_1 + x_1x_2)$,

b) $f : (x_1, x_2) \mapsto (0, 2x_1 - x_2, x_2 + 3x_1)$,

c) $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_2 - 1, 4x_2 + 7x_1)$,

d) $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 - x_3, -x_1 + 4x_2 - 3x_3)$,

e) $f : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} x_i$,

f) $f : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto 10(x_2, \ldots, x_m)$

19. Bestimme für die linearer Abbildungen f aus Übungsaufgabe 18 zu den jeweiligen Unterräumen $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ die Dimension und eine Basis. Veranschauliche die Ergebnisse grafisch (bei e) und f) für m=2 und m=3).

20. a) Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen V, W und gelte die Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ mit Unterräumen U_1, U_2. Beweise die Formel

$$W = f(U_1) \oplus f(U_2) \ .$$

b) Zeige mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen die folgende Aussage: *Für* $f \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$ *mit* $\dim V = \dim W = n$ *ist die Injektivität von* f *gleichbedeutend mit der Surjektivität von* f.