Vorlesung Mathematik für Physiker
Lineare Algebra 1
Wintersemester 2019/2020

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (3. Serie)

Abgabetermin: 11.11.2019

9. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum?

a) $U_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$,
b) $U_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = 1\}$,
c) $U_3 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\}$,
d) $U_4 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 = 0\}$,
e) $U_5 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = x_2\}$,
f) $U_6 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 = x_2^2\}$.

10. a) Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren eines Vektorraums V. Zeige, dass man dann einen Koeffizientenvergleich durchführen kann, d.h., aus

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \qquad \text{folgt} \qquad \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

b) Gib ein Beispiel von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ an, welche nicht den Nullvektor enthalten und für die der Koeffizientenvergleich nicht richtig ist.

c) Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Beweise die Aussage:
$U_1 \cup U_2$ ist genau dann wieder ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_1 \supseteq U_2$ gilt.

11. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = (0, 1, 2, 3), \quad v_2 = (-1, 1, -1, 1), \quad v_3 = (3, 2, 1, 0).$$

a) Berechne den Vektor $3v_1 - 4v_2 + v_3$.
b) Sind v_1, v_2, v_3 linear abhängige oder linear unabhängige Vektoren?

12. Es sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den in der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen.
a) Bildet die Menge

$$\mathcal{P}_m := \{p \in \mathcal{F} | p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_m x^m, x \in \mathbb{R} \text{ mit reellen Konstanten } a_i\}$$

aller reellen Polynome vom Grad $\leq m$ einen Unterraum?
b) Für welche reellen Zahlen M bildet die Menge

$$\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{F} | \, |f(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

aller durch M beschränkten Funktionen einen Unterraum?