Vorlesung Mathematik für Physiker	Hans-Peter Gittel
Lineare Algebra 1	Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020	Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (2. Serie)

Abgabetermin: 04.11.2019

5. a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift $f(x) = \sin x$. Bestimme das Bild $f([0,5])$ sowie das Urbild $f^{-1}(A)$ für $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1-\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}\right)$.

b) Beweise folgende Behauptung:
Sei $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Ist die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, so muß f injektiv und g surjektiv sein.

c) Gib ein Beispiel für die Situation in Teil b) an, wobei sowohl f als auch g *nicht* bijektiv sind.

6. Benutze die vollständige Induktion zum Nachweis von:

a) $\quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad$ für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

b) Der Ausdruck $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch 133 teilbar.
(*Hinweis*: Zeige zunächst $A_{n+1} = 11A_n + 133 \cdot 12^{2n+1}$.)

c) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $3^n > n^2 + 2$?

7. a) Bestimme das Vorzeichen der folgenden Permutationen:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Gib die Permutationen $\pi_1 \circ \pi_1$, $\pi_2 \circ \pi_1$, $\pi_1 \circ \pi_2$, π_1^{-1}, π_2^{-1}, π_3^{-1} an.

c) Schreibe π_2 als Hintereinanderausführung von Transpositionen.

8. a) Zeige, daß die Menge aller bijektiven Abbildungen $f : X \to X$ eine Gruppe bez. der Hintereinanderausführung bildet.

b) Sei K ein Körper und $x, y \in K$. Leite aus den Körperaxiomen folgende zwei Rechenregeln her:

$$x \cdot 0 = 0; \quad \text{bzw.:} \quad \textit{Aus} \;\; x \cdot y = 0 \;\; \textit{folgt} \;\; x = 0 \;\; \textit{oder} \;\; y = 0.$$